Notas de

Geometría Diferencial

E. Torrano

“The advanced reader who skips parts that appear too elementary may miss more than the less advanced reader who skips parts that appear too complex”

-G. Polya

Indice

1 Curvas parametrizadas diferenciables

1.1 Representación analítica

Podemos imaginar intuitivamente las curvas en el espacio como trayectorias de un punto en movimiento; las coordenadas rectangulares (x, y, z) del punto se pueden expresar por medio de tres funciones de un parámetro u, tal que $u \in [u_1, u_2]$, es decir

$$x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u).$$

Debido a ese origen cinemático a veces a la variable u se le atribuye el carácter de la variable tiempo; pero esto no es necesario en absoluto, ya que se puede pasar de un parámetro a otro mediante un cambio de variable $u = f(v)$ (siempre que sea diferenciable), sin que la curva se vea afectada.

Elegiremos los ejes coordenados de modo que el sentido de rotación $OX \to OY \to OZ$ sea el de un tornillo. Las coordenadas (x, y, z) se denotaran también por $[x_1, x_2, x_3]$ o, de modo más breve, por x_i, $i = 1, 2, 3$, con lo que la ecuación de la curva toma la forma $x_i = x_i(u)$, $u_1 \leq u \leq u_2$. También emplearemos la notación vectorial de modo que

$$\overline{x}(u) = [x_1(u), x_2(u), x_3(u)].$$

Se utilizará cualquiera de las notaciones $P(x_i(t_0))$ o $\overline{x}(t_0)$, para representar un punto de coordenadas $(x_1(t_0), x_2(t_0), x_3(t_0))$. Estamos ya en condiciones de dar una definición rigurosa de curva.

Definición 1.1. *Llamaremos curva parametrizada diferenciable a una aplicación diferenciable*[1] $\overline{x} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, *donde* $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ *es un intervalo en sentido amplio,* $\overline{x}(u)$ *tiene por componentes las funciones* $x_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$, *de modo que* $\overline{x}(u) = [x_1(u), x_2(u), x_3(u)]$. *Al valor* $\overline{x}(u)$ *se le llama también* vector de posición *de la curva. A una curva parametrizada diferenciable se la denomina también curva alabeada.*

Observación 1.1. *Si alguna componente, por ejemplo* $x_3(u) = 0$, $\forall u \in I$, *es claro que se trata de una curva en el plano, y en ese caso se prescinde de dicha componente.*

Por otro lado dada la curva $\overline{x}(u) = [x_1(u), x_2(u), x_3(u)]$ *si dos de las componentes son constantes, es obvio que la ecuación* $\overline{x}(u) = [x_1(u), x_2(u), x_3(u)]$, *representa una recta paralela a un eje coordenado.*

Ejemplo 1.1.

1. *Línea recta.- Una recta del espacio puede venir dada por la ecuación*

$$\overline{x}(u) = [a_1 + ub_1, a_2 + ub_2, a_3 + ub_3], \tag{1}$$

[1] Todas sus componentes son funciones derivables en todo punto del dominio. Frecuentemente exigiremos, cuando, quedará claro según el contexto, mucho más, infinita diferenciabilidad, ver [5] pág. 18; otras veces, pediremos menos, dejaremos que ciertos “arcos” diferenciables se unan, permitiendo, en los puntos de unión, que la curva no sea diferenciable, aunque obviamente si continua. La llamaremos diferenciable “a trozos”.

donde a_i, b_i son constantes, siendo una al menos de las $b_i \neq 0$. Esta ecuación representa una recta que pasa por el punto (a_i) y cuyos cosenos directores[2] *son proporcionales a b_i. La ecuación (1) puede, como sabemos, escribirse*

$$\frac{x_1 - a_1}{b_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2} = \frac{x_3 - a_3}{b_3}.$$

2. *Circunferencia.- La circunferencia es una curva plana, su plano puede ser el $z = 0$, y la ecuación adopta entonces la forma*

$$\overline{x}(u) = [r \cos u, r \operatorname{sen} u]. \tag{2}$$

3. *La inversa de la parábola semicúbica, es decir $y = x^{2/3}$, que puede expresarse como*

$$\overline{x}(u) = [u^3, u^2], \;\; u \in \mathbb{R}.$$

   Nótese que $x'(0) = 0$ y $y'(0) = 0$.

4. *La aplicación*

$$\overline{x}(u) = [u^3 - 4u, u^2 - u], \quad u \in \mathbb{R}.$$

   Obsérvese que $x(\frac{1+\sqrt{13}}{2}) = x(\frac{1-\sqrt{13}}{2}) = 3$ y que $y(\frac{1+\sqrt{13}}{2}) = y(\frac{1-\sqrt{13}}{2}) = 3$. Luego en $(3,3)$ hay un punto doble y la curva no tiene tangente única.

5. *Hélice circular.- La hélice es una curva en el espacio cuyas ecuaciones vienen dadas por*

$$\overline{x}(u) = [r \cos u, r \operatorname{sen} u, bu], \tag{3}$$

   con a y b constantes. La curva se encuentra sobre el cilindro $x^2 + y^2 = r^2$ y cuando u se incrementa en 2π, x e y toman sus valores iniciales, mientras z se incrementa en $2\pi b$, que es lo que se denomina paso de la hélice. Si b es positivo tenemos una hélice a derechas; *cuando b es negativo se trata de una hélice a izquierdas. El sentido de la hélice es independiente de la elección de los ejes coordenados o de los parámetros, y constituye una propiedad intrínseca de la curva.*

Observación 1.2. *Nótese también que con las exigencias de la anterior definición, las funciones $x_i(u)$ son continuas y con derivadas de todos los órdenes continuas en el intervalo dado I. Supuesto $u_0 \in I$, podemos entonces expresar $x_i(u)$, mediante $x_i(u_0+h)$, utilizando un desarrollo de Taylor en la forma:*

$$x_i(u) = x_i(u_0 + h) = x_i(u_0) + \frac{h}{1!}x_i(u_0) + \frac{h^2}{2!}x_i(u_0)'' + \ldots + \frac{h^n}{n!}x_i^{(n)} + o(h^n). \tag{4}$$

en donde $x_i'(u_0), x_i''(u_0), \ldots$ son las derivadas respecto del parámetro u y $o(h^n)$ es tal que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{o(h^n)}{h^n} = 0$.

[2] Un vector $\overline{v}$ forma con los ejes OX, OY, OZ, tres ángulos: α, β, γ. Llamamos cosenos directores del vector a los números $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Obviamente si el vector es $\overline{v} = a\overline{e}_1 + b\overline{e}_2 + c\overline{e}_3$, resulta que $\cos\alpha = a/\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, $\cos\beta = b/\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, $\cos\gamma = c/\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Una recta paralela a $\overline{v}$ y que pasa por el punto (a_1, a_2, a_3), tiene de ecuación como es bien conocido

$$\frac{x - a_1}{\cos\alpha} = \frac{y - a_2}{\cos\beta} = \frac{z - a_3}{\cos\gamma}.$$

Definición 1.2. *Dada una curva parametrizada diferenciable, se llaman singulares aquellos puntos $\overline{x}(u_0)$ para los que $\overline{x}'(u_0) = \overline{0}$, o lo que es lo mismo cuando*

$$x_1'(u_0) = x_2'(u_0) = x_3'(u_0) = 0.$$

En otro caso se dice que los puntos son regulares. Diremos que una curva parametrizada diferenciable es regular si no tiene puntos singulares.

Definición 1.3. *Dada una curva parametrizada diferenciable y regular, $\overline{x} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $u_0, u \in I$, llamaremos longitud*[3] *de arco desde el punto $\overline{x}(u_0)$ al $\overline{x}(u)$, al valor*[4]

$$s(u) = \int_{u_0}^{u} |\overline{x}'(t)| dt,$$

donde

$$|\overline{x}'(t)| = \sqrt{[x_1'(t)]^2 + [x_2'(t)]^2 + [x_3'(t)]^2} = \sqrt{\langle \overline{x}'(t), \overline{x}'(t) \rangle}$$

es la longitud del vector $\overline{x}'(t)$. Podríamos utilizar indistintamente la notación $\|\overline{x}'(t)\|$. A lo largo de estas notas hemos optado, siguiendo a [14], por $|\overline{x}'(t)|$, en el bien entendido de que se trata de la longitud (o norma) de un vector y no del módulo de un complejo. Nótese que no hay lugar a confusión pues trabajamos en $\mathbb{R}$-espacios vectoriales, sean $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, etc.,

Observación 1.3. *Como la función $|\ \ |$ no es derivable en el origen, exigimos que $\overline{x}'(t) \neq \overline{0}$, para que de ese modo $s(u)$ sea derivable al menos dos veces.*

Muy frecuentemente utilizaremos la longitud de arco s como parámetro. En ese caso casi nunca será necesario especificar el origen del arco s, ya que la mayor parte de los conceptos se definen únicamente en términos de las derivadas de $\overline{x}(s)$. Aunque en general, es de poca utilidad práctica, si es de gran utilidad teórica.

Es interesante introducir otro convenio más. Dada la curva parametrizada $\overline{x}$ parametrizada por la longitud de arco $s \in (a, b)$, podríamos considerar la curva $\overline{y}$ definida en $(-b, -a)$ por $\overline{y}(s) = \overline{x}(-s)$, que tiene la misma traza que aquella pero está descrita en sentido contrario. Diremos, entonces, que estas dos curvas se diferencian por un cambio de orientación.

Proposición 1.1. *Una curva $\overline{x}(u)$ viene definida*[5] *en función del parámetro arco, es decir $u = s$, si y solo si, $|\overline{x}'(u)| = 1$.*

Demostración. Hemos visto que $s = \int_0^u |\overline{x}'(t)| dt$. Derivando respecto de u, tendremos que $s'(u) = |\overline{x}'(u)|$. Si $u = s$, tendremos que $s'(u) = 1$ y recíprocamente. □

[3] Dada $\overline{x} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva diferenciable, sea $[a, b] \subset I$ un intervalo cerrado. Para cada partición $a = u_0 < u_1 < \ldots < u_n = b$, de $[a, b]$, considérese la suma $\sum_{i=1}^{n} |\overline{x}(u_i) - \overline{x}(u_{i-1})| = l(\overline{x}, P)$, donde P representa la partición dada. Siendo $|P|$, su norma $|P| = \max(u_i - u_{i-1}), i = 1, 2, \ldots n$. Geométricamente $l(\overline{x}, P)$ es la longitud del polígono inscrito en $\overline{x}([a, b])$, con vértices en $\overline{x}(u_i)$. Es trivial observar, dividiendo y multiplicando por Δt el interior del sumatorio anterior, y pasando al límite, que dado $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|P| < \delta$, entonces $\left| \left[\int_a^b |\overline{x}'(t)| dt\right] - l(\overline{x}, P) \right| < \epsilon$.

[4] En el caso $\overline{x}(u) = (x(u), y(u))$, $s(u) = \int_{u_0}^{u} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$. Análogamente si $\rho = \rho(\theta)$, resulta $s(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\rho(\varphi)^2 + [\rho'(\varphi)]^2} d\varphi$.

[5] Cuando esto ocurre en algunos libros de texto se dice que la curva está *unit-speed* parametrizada.

1.2 Plano osculador. Triedro de Frenet. Aplicaciones

Observación 1.4. *La cadena de definiciones es la siguiente*

$$\begin{aligned} \textit{vector tangente} \;&\longrightarrow\; \textit{plano osculador} \longrightarrow \textit{vector normal} \\ &\longrightarrow\; \textit{vector binormal} \;\longrightarrow\; \textit{planos del triedro} \end{aligned}$$

Definición 1.4. *Dada una curva alabeada, llamaremos tangente en un punto $\overline{x}_{t_0}$ al vector unitario que notaremos $\overline{t}(t_0)$ en la dirección de la tangente a la curva.*

Proposición 1.2. *El vector unitario tangente a una curva alabeada regular vale $\overline{t} = \overline{x}'(s)$, donde el vector de posición $\overline{x}(s)$, está parametrizado por la longitud de arco.*

DEM. Que el vector $\overline{x}'(s)$ tiene el sentido del vector tangente resulta obvio, ya que de acuerdo con la definición de derivada de una función vectorial

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\overline{x}(s+\Delta s) - \overline{x}(s)}{\Delta s} = [x_1'(s), x_2'(s), x_3'(s)],$$

la diferencia $\overline{x}(s+\Delta s) - \overline{x}(s)$ es el vector secante, y cuando $\Delta s \to 0$, tenderá a confundirse con la tangente en el punto. Veamos que es unitario. La regla de la cadena nos dice que

$$\overline{x}'(u) = \overline{x}'(s)s'(u), \tag{5}$$

partiendo de $s(u) = \int_{u_0}^{u} \sqrt{\langle \overline{x}'(t), \overline{x}'(t) \rangle} dt$, resulta que $s'(u) = \sqrt{\langle \overline{x}'(u), \overline{x}'(u) \rangle}$, es decir $s'(u) = |\overline{x}'(u)|$. Sabemos que $\overline{x}'(u) = (x_1'(u), x_2'(u), x_3'(u))$, despejando $\overline{x}'(s)$ en (5) resulta finalmente

$$\overline{x}'(s) = \frac{\overline{x}'(u)}{s'(u)} = \frac{\overline{x}'(u)}{|\overline{x}'(u)|}.$$

Por tanto $\overline{x}'(s)$ es un vector unitario en la dirección de la tangente, luego $\overline{t}(s) = \overline{x}'(s)$. □

Observación 1.5. *Si el parámetro no es el arco, el vector $\overline{x}'(u)$ sigue siendo tangente pero ya no es unitario.*

Definición 1.5. *Dada una curva parametrizada, diferenciable y regular, llamamos plano osculador al plano que pasa por tres puntos "consecutivos" situados sobre la curva*[6].

Proposición 1.3. *La ecuación del plano osculador a una curva alabeada viene dada en cartesianas por*[7]

$$\begin{vmatrix} x - x_1(u) & y - x_2(u) & z - x_3(u) \\ x_1'(u) & x_2'(u) & x_3'(u) \\ x_1''(u) & x_2''(u) & x_3''(u) \end{vmatrix} = 0.$$

DEM. Resulta de aplicar el teorema de Rolle. Sabemos que una curva en el espacio viene dada por una ecuación de la forma

$$\overline{x}(u) = x_1(u)\overline{e}_1 + x_2(u)\overline{e}_2 + x_3(u)\overline{e}_3 = [x_1(u), x_2(u), x_3(u)],$$

[6] Se entiende que se toma un punto fijo sobre la curva, se escogen sobre ella otros dos, se traza el plano que pasa por los tres, y se hacen tender los dos últimos al primero, el plano resultante es el plano osculador.

[7] En paramétricas $\overline{X}(\alpha, \beta) = [x_1(u) + \alpha x_1'(u) + \beta x_1''(u), x_2(u) + \alpha x_2'(u) + \beta x_2''(u), x_3(u) + \alpha x_3'(u) + \beta x_3''(u)]$. El vector normal a este plano, en general no unitario, será $\overline{x}'(u) \times \overline{x}''(u)$.

vamos a obtener la ecuación del plano osculador (que también se puede definir como aquel que contiene a dos tangentes "consecutivas") a la curva en un punto dado.

Supongamos que el plano buscado tiene $\overline{b}$ como vector normal. Sea P un punto genérico del plano, O el origen de coordenadas y O' el pie del segmento trazado desde el origen y perpendicular a dicho plano. Llamemos $\overline{X} = [x, y, z]$ al vector de posición del punto P, respecto del origen O. Es claro que $\overline{X} = \overline{OP} = \overline{OO'} + \overline{O'P}$. Resulta que el producto escalar

$$\langle \overline{X}, \overline{b} \rangle = p = \text{cte}.$$

En efecto, siempre el vector que une el origen con el punto P puede descomponerse en un vector $\overline{a} = \overline{O'P}$ contenido en el plano (perpendicular a $\overline{b}$), más el vector $\overline{OO'}$ que une el plano con el origen, y que es proporcional a $\overline{b}$ y constante, es decir $\overline{X} = p\overline{b} + \overline{a}$, y se cumple que $\overline{a} \perp \overline{b}$, y al hacer el producto escalar el segundo sumando de $\overline{X}$ se anula.

Sea $\overline{x}(u)$ la ecuación de la curva dada, es claro que si el plano pasa por tres puntos de la curva con parámetros u_1, u_2, u_3, se cumplirá

$$\begin{aligned}
\langle \overline{x}(u_1), \overline{b} \rangle - p &= 0, \\
\langle \overline{x}(u_2), \overline{b} \rangle - p &= 0, \\
\langle \overline{x}(u_3), \overline{b} \rangle - p &= 0.
\end{aligned}$$

Construyamos la función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ tal que

$$f(u) = \langle \overline{x}(u), \overline{b} \rangle - p.$$

las tres relaciones anteriores se traducen en $f(u_1) = f(u_2) = f(u_3) = 0$. Aplicando Rolle a $f(u)$ en $[u_1, u_2]$ y luego en $[u_2, u_3]$, tenemos que $\exists v_1 \in (u_1, u_2)$tal que $f'(v_1) = 0$, y además $\exists v_2 \in (u_2, u_3)$ tal que $f'(v_2) = 0$. Pero, a su vez, aplicando de nuevo Rolle a $f'(x)$ en $[v_1, v_2]$, tendremos que $\exists w_1 \in (v_1, v_2)$ tal que $f''(w_1) = 0$. Para que los puntos sean "consecutivos" hacemos que $u_3 \to u_1 = u$, $u_2 \to u_1 = u$, y por tanto también $v_1 \to u$, $v_2 \to u$ y $w_1 \to u$. Hemos obtenido tres relaciones

$$\begin{aligned}
f(u) &= \langle \overline{x}(u), \overline{b} \rangle - p = 0, \\
f'(u) &= \langle \overline{x}'(u), \overline{b} \rangle = 0, \\
f''(u) &= \langle \overline{x}''(u), \overline{b} \rangle = 0,
\end{aligned}$$

junto con $\langle \overline{X}, \overline{b} \rangle = p$. Restando de esta la primera queda $\langle (\overline{X} - \overline{x}), \overline{b} \rangle = 0$, y unida a las otras dos ecuaciones resulta

$$\begin{aligned}
\langle (\overline{X} - \overline{x}), \overline{b} \rangle &= 0 \\
\langle \overline{x}', \overline{b} \rangle &= 0 \\
\langle \overline{x}'', \overline{b} \rangle &= 0
\end{aligned}$$

El vector $\overline{X} - \overline{x}$ está en el mismo plano que el determinado por $\overline{x}'$ y por $\overline{x}''$, por tanto uno es combinación lineal de los otros dos y se cumple

$$\begin{vmatrix}
x - x_1(u) & y - x_2(u) & z - x_3(u) \\
x_1'(u) & x_2'(u) & x_3'(u) \\
x_1''(u) & x_2''(u) & x_3''(u)
\end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

□

Observación 1.6. *Nótese que la anterior ecuación puede escribirse como*

$$\langle \overline{X} - \overline{x}(u), \overline{x}'(u) \times \overline{x}''(u) \rangle = 0,$$

es decir el vector $\overline{O'P} = \overline{OP} - \overline{OO'}$ *situado en el plano osculador es perpendicular al* $\overline{x}'(u) \times \overline{x}''(u)$*. En otras palabras, el vector* $\overline{x}'(u) \times \overline{x}''(u)$*, aunque no es unitario es perpendicular al plano osculador, es decir tiene la misma dirección de* $\overline{b}$*.*

Definición 1.6. *Llamaremos dirección*[8] *normal a la curva en un punto dado, a la de una recta contenida en el plano osculador en ese punto que es perpendicular a la tangente. Se define el vector normal unitario* $\overline{n}$ *como un vector unitario en esa dirección con un sentido, que en el plano será hacia la región de concavidad (es decir en el sentido en que luego habrá que tomar el radio de curvatura) , y en el espacio vendrá señalado por la orientación del vector curvatura.*

Proposición 1.4. *El vector normal* $\overline{n}$ *es un vector unitario en la dirección de* $\overline{x}''(s)$*. Es decir* $\overline{n} = \overline{x}''(s)/|\overline{x}''(s)|$*.*

DEM. Derivemos respecto a s la igualdad $\overline{t}(s) = \overline{x}'(s)$. Aplicando la definición de derivada tenemos que

$$\overline{t}'(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\overline{t}(s + \Delta s) - \overline{t}(s)}{\Delta s} = \overline{x}''(s) = [x_1''(s), x_2''(s), x_2''(s)].$$

Veamos en primer lugar que el vector $\overline{x}''(s)$ es perpendicular a la tangente En efecto, derivando respecto de s la identidad $\langle \overline{t}(s), \overline{t}(s) \rangle = 1$, queda: $\langle \overline{t}'(s), \overline{t}(s) \rangle = 0 \Rightarrow \overline{t}'(s) \perp \overline{t}(s)$. Para ver que está en el plano osculador, derivemos $\overline{t} = \overline{x}'(s) = \overline{x}'(u)u'(s)$ respecto de s y obtenemos

$$\overline{t}'(s) = \overline{x}''(s) = \overline{x}''(u)[u'(s)]^2 + \overline{x}'(u)u''(s) \neq \overline{x}''(u). \tag{7}$$

basta poner el valor de $\overline{x}''(s)$ obtenido en (7) substituyendo a $\overline{X} - \overline{x}$, dentro de (6) y comprobar que el determinante que resulta puede descomponerse en suma de dos determinantes nulos. Por tanto el vector $\overline{x}''(s)$ es combinación lineal de los vectores que determinan el plano osculador y por tanto está en dicho plano. □

Observación 1.7. *Más adelante justificaremos la elección de la orientación del vector*

$$\overline{n}(s) = \frac{\overline{x}''(s)}{|\overline{x}''(s)|},$$

entre las dos posibles. En cualquier caso no debemos cometer el error de suponer que $\overline{x}''(u)$ *y* $\overline{x}''(s)$*, como ocurría con* $\overline{x}'(s)$ *y* $\overline{x}'(u)$*, difieren en una constante. La ecuación (7) lo pone de manifiesto.*

Definición 1.7. *El vector binormal se define como* $\overline{b} = \overline{t} \times \overline{n}$*.*

Definición 1.8. *Al triedro ortonormal definido mediante* $\{\overline{t}, \overline{n}, \overline{b}\}$ *se le denomina triedro de Frenet. Al plano determinado por* $\overline{t}$ *y* $\overline{n}$ *se le denomina plano osculador, al formado por* $\overline{n}$ *y* $\overline{b}$ *se le llama plano normal, y al que contiene* $\overline{t}$ *y* $\overline{b}$ *plano rectificante.*

[8] Distinguimos entre dirección y sentido en forma análoga a como se hace en física elemental.

Observación 1.8. *Obtener los planos rectificante y normal es trivial. En efecto, conocemos que el plano rectificante contiene los vectores $\bar{t}$ y $\bar{b} = \bar{t} \times \bar{n}$. Sabemos que $\bar{t} = \bar{x}'(s)$ es proporcional a $\bar{x}'(u) = [x_1'(u), x_2'(u), x_3'(u)]$. Además si $Ax + By + Cz + D = 0$ es la ecuación del plano osculador obtenida mediante (6), un vector perpendicular a dicho plano es $[A, B, C]$ que aunque no sea unitario tiene la misma dirección que $\bar{b}$. Por tanto el plano rectificante en el punto $(x_1(u), x_2(u), x_3(u))$ será*[9]

$$\begin{vmatrix} x - x_1(u) & y - x_2(u) & z - x_3(u) \\ x_1'(u) & x_2'(u) & x_3'(u) \\ [\bar{x}'(u) \times \bar{x}''(u)]_1 & [\bar{x}'(u) \times \bar{x}''(u)]_2 & [\bar{x}'(u) \times \bar{x}''(u)]_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Por otro lado sabemos que el plano normal viene definido por $\bar{b}$ y $\bar{n} = \bar{b} \times \bar{t}$. Como $[A, B, C]$ es proporcional a $\bar{b}$, tendremos que $[A, B, C] \times \bar{x}'(u)$ tiene la misma dirección que $\bar{n}$. En consecuencia el plano normal que contiene a los vectores $\bar{b}$ y $\bar{n}$ será

$$\begin{vmatrix} x - x_1(u) & y - x_2(u) & z - x_3(u) \\ [\bar{x}'(u) \times \bar{x}''(u)]_1 & [\bar{x}'(u) \times \bar{x}''(u)]_2 & [\bar{x}'(u) \times \bar{x}''(u)]_3 \\ [[\bar{x}'(u) \times \bar{x}''(u)] \times \bar{x}'(u)]_1 & [[\bar{x}'(u) \times \bar{x}''(u)] \times \bar{x}'(u)]_2 & [[\bar{x}'(u) \times \bar{x}''(u)] \times \bar{x}'(u)]_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Nótese que no se utiliza el vector $\bar{x}''(s)$ en la última fila del determinante, y que daría una expresión más sencilla porque precisaríamos conocer $u(s)$, lo que no siempre es demasiado inmediato.

Ejemplo 1.2. *Veamos una aplicación del triedro de Frenet. Dada $\bar{x}(u)$, podemos obtener $\{\bar{t}(u), \bar{n}(u), \bar{b}(u)\}$, mediante las fórmulas anteriores. Estos vectores son fundamentales si tratamos de "montar" curvas planas sobre curvas alabeadas. Por ejemplo si queremos situar una espiral, de ecuación $\bar{y}(t) = [0, t \operatorname{sen} t, t \cos t]$, sobre la curva $\bar{x}(u)$ y en su plano normal, resulta inmediato que la ecuación será*

$$\bar{z}(t) = \bar{x}(u) + [0, t \operatorname{sen}(t), t \cos(t)] \begin{pmatrix} \bar{t}(u) \\ \bar{n}(u) \\ \bar{b}(u) \end{pmatrix},$$

con $t \in [0, 4\pi]$, y variando el valor de $u \in I$, la colocaríamos en distintos puntos de ella.

Esta técnica nos permitirá más adelante construir "tubos" en torno a curvas alabeadas, sin más que situar la circunferencia $\bar{y}(t) = [r \operatorname{sen} t, r \cos t, 0]$ con r fijo en el plano normal, y variar simultáneamente $t \in [0, 2\pi]$ y $u \in I$. En ese caso la ecuación del "tubo"(que obviamente es una superficie) sería $\bar{z}(t, u) = \bar{x}(u) + r\ (\operatorname{sen}(t)\ \bar{n}(u) + \cos(t)\ \bar{b}(u))$. Nótese que no funcionaría si la curva fuera una recta ¿Porqué?

1.3 Curvatura de flexión o primera curvatura

Definición 1.9. *El vector curvatura $\bar{\kappa}$ se define como la variación del vector tangente respecto a la longitud del arco recorrido, es decir*

$$\bar{\kappa}(s) = \frac{d\bar{t}}{ds} = \bar{x}''(s).$$

[9] Hemos visto que $\bar{x}''(u)$ estaba en el plano osculador, por lo que $\bar{x}'(u) \times \bar{x}''(u)$ tiene la dirección de la binormal. Operativamente es más cómodo calcular $\bar{b} = k[\bar{x}'(u) \times \bar{x}''(u)]$, obtener $\bar{n} = \bar{b} \times \bar{t} = k'\{[\bar{x}'(u) \times \bar{x}''(u)] \times \bar{x}'(u)\}$, y luego ajustar k' para que $\bar{n}$ sea unitario, que determinar la ecuación $Ax+By+Cz+D = 0$ y despejar A,B y C.

Al módulo de dicho vector dotado de signo[10] *se le denomina curvatura y se representa por* κ*, por lo que* $\kappa = |\overline{x}''(s)| = \sqrt{\langle \overline{x}''(s), \overline{x}''(s)\rangle}$.

Corolario 1.1. *Sea* $\overline{x}(s)$ *la ecuación paramétrica de una curva regular, parametrizada respecto al arco, entonces se cumple que*

$$\overline{x}''(s) = \kappa(s)\overline{n}(s), \tag{8}$$

donde, como hemos señalado, $\kappa = |\overline{x}''(s)|$.

Dem. Por definición el vector curvatura es $\overline{\kappa}(s) = \overline{t}'(s)$. Utilizando una variable intermedia u en $\overline{x}(s) = \overline{x}(u(s))$ tenemos derivando que $\overline{t}(s) = \overline{x}'(s) = \overline{x}'(u)u'(s)$. Derivando esta expresión respecto a s resulta

$$\overline{x}''(s) = \overline{t}'(s) = \overline{x}''(u)u'(s)^2 + \overline{x}'(u)u''(s). \tag{9}$$

Vemos que $\overline{x}''(s) = \overline{t}'(s)$ es combinación del vector proporcional al tangente $\overline{x}'(u)$ y del vector $\overline{x}''(u)$. En otras palabras $\overline{x}''(s)$ está en el plano osculador. Por otro lado derivando $\langle \overline{t}(s), \overline{t}(s)\rangle = 1$, respecto de s, resulta que $\langle \overline{t}'(s), \overline{t}(s)\rangle = 0$, es decir $\overline{x}''(s) = \overline{t}'(s)$ es perpendicular a $\overline{t}(s)$. Luego si $\overline{x}''(s)$ está en el plano osculador y es perpendicular a $\overline{t}(s)$, esa es la propiedad que define al vector normal, es decir podemos escribir $\overline{x}''(s) = \alpha(s)\overline{n}(s)$, con $\alpha(s)$ escalar. Utilizando ahora la definición de $\kappa(s)$, i.e. $\kappa(s) = |\overline{x}''(s)|$, tendremos que $\alpha(s) = \kappa(s)$ y finalmente resulta que $\overline{x}''(s) = \overline{\kappa}(s) = \kappa(s)\overline{n}(s)$, como queríamos probar. □

Ejercicio 1.1. Sean $a, b > 0$. Dada la curva alabeada $\overline{x} : (-1, 1) \to \mathbb{R}^3$, tal que

$$\overline{x}(t) = [a(1+t)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}, bt].$$

Se pide: 1) Obtener el plano osculador en $t = 0$, en función de a y b. 2) Determinar a y b de modo que $t = s$, donde con s –como es habitual– indicamos el parámetro arco. 3) Calcular la curvatura en un punto genérico con los valores de a y b obtenidos en el segundo apartado.

Proposición 1.5. *Sea* $\overline{x}(s)$ *una curva regular, entonces se verifica*

$$\begin{aligned} \kappa &= \sqrt{\langle \overline{x}''(s), \overline{x}''(s)\rangle} = |\overline{x}''(s)| \\ &= \frac{|\overline{x}'(u) \times \overline{x}''(u)|}{|\overline{x}'(u)|^3}. \end{aligned} \tag{10}$$

Dem. Hemos visto ya que $\kappa = |\overline{x}''(s)| = \langle \overline{x}''(s), \overline{x}''(s)\rangle^{1/2}$. Vamos a calcular $\langle \overline{x}''(s), \overline{x}''(s)\rangle$ en función del parámetro u. Comencemos por escribir $\overline{x}(s) = \overline{x}(u(s))$, y apliquémosle a esta expresión la regla de la cadena, tendremos derivando dos veces respecto de s

$$\begin{aligned} \overline{x}'(s) &= \overline{x}'(u)\, u'(s) \\ \overline{x}''(s) &= \overline{x}''(u)\, u'(s)^2 + \overline{x}'(u)u''(s). \end{aligned}$$

Vamos a calcular ahora $u'(s)$ y $u''(s)$. Veamos en primer lugar $u'(s)$. Sabemos que $s(u) = \int_{u_0}^{u} \sqrt{\langle \overline{x}'(t), \overline{x}'(t)\rangle}\, dt$, luego derivando respecto a u y aplicando el TFC tenemos que

[10] Solo se dota de signo a la curvatura cuando la curva es plana, en otro caso siempre es positiva. Se trata de distinguir los lados cóncavo o convexo de una curva plana; el vector normal $\overline{n}$ unitario se considera entonces continuo a lo largo de la curva.

$s'(u) = \sqrt{\langle \overline{x}'(u), \overline{x}'(u)\rangle}$. Por otro lado como $s(u(s)) = s$, derivando respecto de s resulta $u'(s)s'(u) = 1$. Finalmente despejando $u'(s)$ tenemos que

$$u'(s) = \frac{1}{\sqrt{\langle \overline{x}'(u), \overline{x}'(u)\rangle}} = \frac{1}{|\overline{x}'(u)|}. \tag{11}$$

Luego podemos escribir

$$\begin{aligned} \overline{x}'(s) &= \overline{x}'(u)\ \langle \overline{x}'(u), \overline{x}'(u)\rangle^{-1/2} \\ \overline{x}''(s) &= \overline{x}''(u)\ \langle \overline{x}'(u), \overline{x}'(u)\rangle^{-1} +\ \overline{x}'(u)\ u''(s). \end{aligned} \tag{12}$$

Obtengamos ahora $u''(s)$. Derivando $u'(s)$ respecto de s en (11), tendremos que

$$u''(s) = \frac{-\langle \overline{x}''(u), \overline{x}'(u)\rangle}{\langle \overline{x}'(u), \overline{x}'(u)\rangle^{3/2}}\ u'(s) = -\frac{\langle \overline{x}''(u), \overline{x}'(u)\rangle}{\langle \overline{x}'(u), \overline{x}'(u)\rangle^{2}}.$$

Luego substituyendo en la expresión de $\overline{x}''(s)$ en (12), queda

$$\begin{aligned} \overline{x}''(s) &= \frac{\overline{x}''(u)}{\langle \overline{x}'(u), \overline{x}'(u)\rangle} - \overline{x}'(u)\ \frac{\langle \overline{x}''(u), \overline{x}'(u)\rangle}{\langle \overline{x}'(u), \overline{x}'(u)\rangle^{2}} \\ &= \frac{\overline{x}''(u)\langle \overline{x}'(u), \overline{x}'(u)\rangle -\ \overline{x}'(u)\langle \overline{x}''(u), \overline{x}'(u)\rangle}{\langle \overline{x}'(u), \overline{x}'(u)\rangle^{2}}. \end{aligned} \tag{13}$$

Ahora calculamos $\langle \overline{x}''(s), \overline{x}''(s)\rangle$, utilizando (13). Veamos en primer lugar el numerador

$$\begin{aligned} &\langle [\overline{x}''(u)\langle \overline{x}'(u), \overline{x}'(u)\rangle -\ \overline{x}'(u)\langle \overline{x}''(u), \overline{x}'(u)\rangle], [\overline{x}''(u)\langle \overline{x}'(u), \overline{x}'(u)\rangle -\ \overline{x}'(u)\langle \overline{x}''(u), \overline{x}'(u)\rangle]\rangle \\ &= \langle \overline{x}''(u), \overline{x}''(u)\rangle\langle \overline{x}'(u), \overline{x}'(u)\rangle^2 - \langle \overline{x}''(u), \overline{x}'(u)\rangle^2\langle \overline{x}'(u), \overline{x}'(u)\rangle \\ &- \langle \overline{x}'(u), \overline{x}''(u)\rangle^2\langle \overline{x}'(u), \overline{x}'(u)\rangle + \langle \overline{x}'(u), \overline{x}'(u)\rangle\langle \overline{x}''(u), \overline{x}'(u)\rangle^2 \\ &= [\langle \overline{x}''(u), \overline{x}''(u)\rangle\langle \overline{x}'(u), \overline{x}'(u)\rangle - \langle \overline{x}''(u), \overline{x}'(u)\rangle^2]\{\langle \overline{x}'(u), \overline{x}'(u)\rangle\}. \end{aligned} \tag{14}$$

El denominador es obvio que vale $\langle \overline{x}'(u), \overline{x}'(u)\rangle^4$. Resultará finalmente

$$\begin{aligned} |\overline{x}''(s)|^2 &= \langle \overline{x}''(s), \overline{x}''(s)\rangle = \frac{1}{\langle \overline{x}'(u), \overline{x}'(u)\rangle^4}\left[\langle \overline{x}''(u), \overline{x}''(u)\rangle\ \langle \overline{x}'(u), \overline{x}'(u)\rangle^2 - \right. \\ &\quad \left. \langle \overline{x}'(u), \overline{x}'(u)\rangle\ \langle \overline{x}''(u), \overline{x}'(u)\rangle^2\right] \\ &= \frac{\langle \overline{x}''(u), \overline{x}''(u)\rangle\ \langle \overline{x}'(u), \overline{x}'(u)\rangle -\ \langle \overline{x}''(u), \overline{x}'(u)\rangle^2}{\langle \overline{x}'(u), \overline{x}'(u)\rangle^3}. \end{aligned} \tag{15}$$

A partir de la identidad trivial $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, expresada mediante el módulo al cuadrado de los productos vectorial y escalar resulta un caso particular de la identidad[11] de Lagrange

$$\frac{|\overline{u} \times \overline{v}|^2}{|\overline{u}|^2\ |\overline{v}|^2} + \frac{\langle \overline{u}, \overline{v}\rangle^2}{|\overline{u}|^2\ |\overline{v}|^2} = 1.$$

De donde

$$|\overline{u} \times \overline{v}|^2 = \langle [\overline{u} \times \overline{v}]\ ,\ [\overline{u} \times \overline{v}]\rangle = \langle \overline{u}, \overline{u}\rangle\ \langle \overline{v}, \overline{v}\rangle - \langle \overline{u}, \overline{v}\rangle^2.$$

[11] Se cumple que $\langle [\overline{a} \times \overline{b}]\ ,\ [\overline{c} \times \overline{d}]\rangle = \begin{vmatrix} \langle \overline{a}, \overline{c}\rangle & \langle \overline{a}, \overline{d}\rangle \\ \langle \overline{b}, \overline{c}\rangle & \langle \overline{b}, \overline{d}\rangle \end{vmatrix}$.

Substituyendo esta última fórmula en (15) resulta

$$\kappa^2 = |\overline{x}''(s)|^2 = \frac{|\overline{x}'(u) \times \overline{x}''(u)|^2}{|\overline{x}'(u)|^6}.$$

Extrayendo la raíz cuadrada en ambos miembros resulta la fórmula del enunciado. □

Corolario 1.2. *La fórmula para la curvatura*[12] *cuando la función viene dada en el plano mediante $y = f(x)$, es*

$$\kappa = \frac{f''(x)}{(1 + [f'(x)]^2)^{3/2}}.$$

Dem. Para probarlo basta con que consideremos

$$\overline{x}(t) = (x, f(x), 0).$$

Es inmediato que

$$\begin{aligned} \overline{x}(x)' &= (1, f'(x), 0) \\ \overline{x}(x)'' &= (0, f''(x), 0) \end{aligned}$$

De donde

$$\overline{x}'(x) \times \overline{x}''(x) = \begin{vmatrix} \overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \overline{e}_3 \\ 1 & f'(x) & 0 \\ 0 & f''(x) & 0 \end{vmatrix} = f''(x)\, \overline{e}_3,$$

luego

$$|\overline{x}'(x) \times \overline{x}''(x)|^2 = \langle [\overline{x}'(x) \times \overline{x}''(x)]\ ,\ [\overline{x}'(x) \times \overline{x}''(x)] \rangle = [f''(x)]^2.$$

Por otro lado

$$|\overline{x}'(x)|^2 = \langle \overline{x}'(x), \overline{x}'(x) \rangle = 1 + f'(x)^2.$$

Finalmente

$$\kappa^2 = \frac{[f''(x)]^2}{(1 + [f'(x)]^2)^3} \quad \Longrightarrow \quad |\kappa| = \frac{|f''(x)|}{(1 + [f'(x)]^2)^{3/2}}.$$

□

Observación 1.9. *La fórmula del corolario anterior puede deducirse directamente. Sea una curva dada por $y = f(x)$, supondremos que $f \in C^2(A)$. Llamemos $\alpha(x)$ a la función que para cada valor de x nos da el ángulo que forma la tangente a la función con el eje OX. Consideremos los puntos $(x, f(x))$ y $(x + h, f(x + h))$. Tendremos*

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \alpha(x + h) - \alpha(x) \\ \Delta s &\approx \sqrt{h^2 + [f(x + h) - f(x)]^2} \end{aligned}$$

[12] Es fácil probar que una curva que viene dada por $\overline{x}(t) = (x(t), y(t))$, la curvatura vale $\kappa(t) = [x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)]/([x'(t)]^2 + [y'(t)]^2)$. Tampoco es difícil demostrar que si tenemos $\rho = \rho(\theta)$, resulta $k(\theta) = [2(\rho')^2 - \rho\rho'' + \rho^2]/\{(\rho')^2 + \rho^2\}^{3/2}$.

Llamaremos curvatura de f en el punto $(x, f(x))$, al cociente $\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ cuando $h \to 0$, es decir

$$\begin{aligned}
\kappa(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\alpha(x+h)-\alpha(x)}{\sqrt{h^2+[f(x+h)-f(x)]^2}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\alpha(x+h)-\alpha(x)}{h} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]^2}}.
\end{aligned}$$

Pero $\tan\alpha(x) = f'(x)$, *de donde* $\alpha(x) = \arctan(f'(x))$, *derivando tendremos*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\alpha(x+h)-\alpha(x)}{h} = \alpha'(x) = \frac{1}{1+[f'(x)]^2} f''(x).$$

Substituyendo quedará

$$\kappa(x) = \frac{f''(x)}{[1+(f'(x))^2]^{3/2}}.$$

Nótese que si un punto es de inflexión $f''(x) = 0$, y evidentemente la curvatura es nula. Sin embargo puede ocurrir que la curvatura sea nula sin que haya inflexión como ocurre con $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4$ en $x = 0$, en donde hay un máximo relativo y la curvatura es obviamente nula.

Definición 1.10. *La curvatura se utiliza para definir lo que se denomina "vértice" +6. de una curva plana y regular, es aquel punto*[13] *donde $\kappa'(t) = 0$.*

Observación 1.10. *La curvatura de una curva también se denomina curvatura de flexión*[14].

Proposición 1.6. *La condición necesaria y suficiente para que una curva alabeada sea recta es que $\kappa(u) = 0$, $\forall u$.*

Dem. Si la curva es una línea recta, se trata de una curva plana y por comodidad la podemos suponer en el plano OXY. El vector tangente $\overline{t}$ es constante, y por lo tanto el ángulo α_T que forma con el origen de ángulos permanece invariable, en consecuencia

$$\kappa(s) = |\frac{d\alpha_T}{ds}| = 0.$$

Recíprocamente si la curvatura es cero, tendremos que $\overline{x}''(s) = 0$, de donde $\overline{x}'(s) = \overline{t}(s) = \overline{\text{cte}}.$, de donde $\overline{x}(s) = \overline{x}_0 + s \cdot \overline{\text{cte}}$. Como $\overline{x}_0$ es también una constante de integración. Tendremos que $\overline{x}(s)$ es una recta de vector dirección $\overline{\text{cte}}$. □

Observación 1.11. *En los puntos donde $\kappa(s) = 0$, el vector normal (y por tanto el plano osculador) no está definido, por ejemplo en los puntos de una recta. Para profundizar en el análisis local de curvas, necesitamos, de manera esencial, el plano osculador. Es por eso conveniente decir que $s \in I$ es un punto singular de orden 1 si $\overline{\kappa}(s) = \overline{x}''(s) = 0$ (en este contexto los puntos donde $\overline{x}'(s) = 0$ se denominan puntos singulares de orden 0). En todo los visto nos ocupamos de curvas parametrizadas por la longitud de arco sin puntos singulares de orden 1.*

[13] Un teorema notable conocido como teorema de los cuatro vértices afirma: "Una curva simple, cerrada y convexa tiene al menos cuatro vértices", ver pág. 51 de [5]. No confundir "vértice" con punto anguloso, ya que la condición de regularidad exigida obliga a que sea diferenciable en esos puntos.

[14] Esta denominación puede encontrarse por ejemplo en la pág. 268 del tomo II del libro *Análisis Matemático* de J. Rey Pastor, P. Pi Calleja y C. A. Trejo.

Definición 1.11. *En el análisis de curvas se introduce una cierta terminología para calificar a los puntos singulares de una curva.*

- *Se dice que una curva presenta un punto multiple*[15] *de orden m cuando la curva "pasa m veces" por dicho punto. Por ejemplo* $\rho = \operatorname{sen}(3\theta)$ *tiene un punto triple en* $(0, 0)$.

- *Se dice que un punto es un punto cuña o anguloso cuando las semitangentes por la derecha y por la izquierda existen y forman un ángulo en dicho punto distinto*[16] *de* π *(existe tangente) y* 0 *(es un punto cúspide). Por ejemplo la función* $f(x) = x/(1 + e^{1/x})$ *en el punto* $x = 0$.

- *Se dice que un punto es un punto cúspide o de retroceso si se trata de un punto donde no hay tangente y las semitangentes existen y forman un ángulo nulo. Se llama de primera especie, como el* $x = 0$ *en* $f(x) = x^{2/3}$*, o de segunda especie, dependiendo de si la curva esta a ambos lados de las semitangentes o si está en un solo*[17] *lado.*

- *Se dice que un punto es aislado si lo es en sentido topológico. Por ejemplo el* $x = 0$ *en* $f(x) = \sqrt{x^2(x^2 - 1)}$.

- *A los puntos donde la curva termina abruptamente se les llama puntos de detención. Por ejemplo el* $x = 0$ *por la izquierda en* $f(x) = e^{1/x}$*, o el* $x = 1$ *y el* $x = -1$ *en* $f(x) = \sqrt{x^2(x^2 - 1)}$.

1.4 Centro y radio de curvatura. Circunferencia osculatriz. Evoluta y evolvente

Definición 1.12. *Sea una curva* $\overline{x}(u)$*, parametrizada regular. Dado el punto* $P \equiv \overline{x}(u_0)$ *sobre dicha curva. Se denomina centro de curvatura de la curva respecto del punto* P *al punto*

$$C \equiv \overline{x}(u_0) + R(u_0)\,\overline{n}(u_0), \quad R(u_0) = 1/\kappa(u_0).$$

El valor $R = 1/\kappa(u_0)$ *recibe el nombre de radio de curvatura en dicho punto.*

Definición 1.13. *Se denomina*[18] *circunferencia osculatriz de una curva dada* $\overline{x}(s)$*, en un punto* P *de ella, a la circunferencia contenida en el plano osculador con centro en el centro de curvatura y cuyo radio es el valor absoluto del radio de curvatura.*

Observación 1.12. *Es fácil probar que la circunferencia osculatriz a una curva tiene un contacto de orden dos o superior a dos con la curva.*

Ejercicio 1.2. Se considera una elipse centrada en el origen de semiejes $a = 3$ y $b = 1$, y se pide construir una circunferencia interior y tangente a la elipse que pueda rodar apoyándose en ella a lo largo de todos sus puntos (por lo que no debe tener contacto con

[15] Estos puntos no pueden darse por definición en una función.

[16] En un punto con tangente las semitangentes forman un ángulo de valor π.

[17] Solo pueden presentarse en curvas pero no en funciones, por ejemplo $(x - y^2)^2 = y^5$ en el origen.

[18] La circunferencia osculatriz se puede también definir como aquella circunferencia que pasa por tres puntos "consecutivos" de la curva (tres puntos determinan un plano, y en un plano tres puntos determinan una circunferencia).

la elipse más que un solo punto). Determinar el radio máximo[19] que puede tener dicha circunferencia.

Definición 1.14. *La evoluta de una curva dada es el lugar geométrico de sus centros de curvatura en sus distintos puntos. A la curva primitiva se la denomina evolvente de la evoluta. Obviamente si $\overline{x}(u)$ es una curva, su evoluta será $\overline{y}(u) = \overline{x}(u) + \dfrac{1}{\kappa(u)}\,\overline{n}(u)$.*

1.5 Torsión o segunda curvatura

Observación 1.13. *Es claro que si una curva es plana la tangente y la normal varían conforme recorremos la curva pero su producto vectorial: la binormal, no. La torsión mide la variación de la binormal respecto de la variación del arco.*

Definición 1.15. *Llamaremos vector torsión a la variación de la binormal respecto de la longitud de arco, es decir*

$$\frac{d\overline{b}}{ds} = \overline{b}'(s).$$

Proposición 1.7. *Se cumple que*

$$\overline{b}'(s) = -\tau(s)\,\overline{n}.$$

Dem. Tratemos de averiguar como varia el vector binormal con s, es decir calculemos

$$\overline{b}'(s) = \frac{d\overline{b}}{ds}.$$

Si partimos de $\langle \overline{b}, \overline{t} \rangle = 0$, y derivamos tenemos que $\langle \overline{b}'(s), \overline{t}(s)\rangle + \langle \overline{b}(s), \overline{t}'(s)\rangle = 0$, de donde

$$\langle \overline{b}'(s), \overline{t}(s)\rangle = -\langle \overline{b}(s), \overline{t}'(s)\rangle = -\langle \overline{b}(s), (\kappa\overline{n})\rangle = 0 \;\Rightarrow\; \overline{b}'(s) \perp \overline{t}.$$

Por otro lado

$$\langle \overline{b}(s), \overline{b}(s)\rangle = 1 \;\Rightarrow\; \langle \overline{b}'(s), \overline{b}(s)\rangle = 0 \;\Rightarrow\; \overline{b}'(s) \perp \overline{b},$$

luego $\overline{b}'(s)$ tiene la dirección de la normal, en consecuencia podemos[20] escribir

$$\frac{d\overline{b}}{ds} = -\tau(s)\,\overline{n}. \tag{16}$$

□

Definición 1.16. *A la función $\tau(s)$ que aparece en (16) se la denomina torsión o segunda curvatura. La torsión cuantifica lo plana que deja de ser una curva en un punto.*

[19]Este ejercicio volverá a plantearse de un modo más general cuando hablemos de las trayectorias de bolas sobre superficies, veremos entonces el importante papel que juega la curvatura máxima de las secciones normales a lo largo de la trayectoria.

[20]Nótese que también hubiera sido válida $\overline{b}'(s) = \tau\,\overline{n}$. De hecho hay libros ([5] por ejemplo) que adoptan este último criterio. La razón de que elijamos en (16) el signo menos, como en [14] o [1], se debe al significado que esa elección tiene en las curvas orientadas.

Proposición 1.8. *Se verifica que*[21]

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{(\overline{x}'(s),\overline{x}''(s),\overline{x}'''(s))}{\langle\overline{x}''(s),\overline{x}''(s)\rangle} = \frac{(\overline{x}'(s),\overline{x}''(s),\overline{x}'''(s))}{|\overline{x}''(s)|^2}\\ &= \frac{(\overline{x}'(u),\overline{x}''(u),\overline{x}'''(u))}{\langle[\overline{x}'(u)\times\overline{x}''(u)],[\overline{x}'(u)\times\overline{x}''(u)]\rangle} = \frac{(\overline{x}'(u),\overline{x}''(u),\overline{x}'''(u))}{|\overline{x}'(u)\times\overline{x}''(u)|^2}\end{aligned}$$

donde por $(\overline{a},\overline{b},\overline{c})$ *entendemos el producto mixto de tres vectores, es decir* $\langle[\overline{a}\times\overline{b}],\overline{c}\rangle = \langle\overline{a},[\overline{b}\times\overline{c}]\rangle$.

Dem. Como $\overline{b}=\overline{t}\times\overline{n}$, y $\langle\overline{n},\overline{n}\rangle=1$, resulta que

$$\begin{aligned}\tau &= \langle-\overline{n},-\tau\overline{n}\rangle = -\langle\overline{n},\frac{d\overline{b}}{ds}\rangle = -\langle\overline{n},\frac{d[\overline{t}\times\overline{n}]}{ds}\rangle\\ &= -\langle\overline{n},[(\frac{d\overline{t}}{ds}\times\overline{n})+(\overline{t}\times\frac{d\overline{n}}{ds})]\rangle = -\langle\overline{n},[\overline{t}\times\frac{d\overline{n}}{ds}]\rangle. \qquad (17)\end{aligned}$$

Sabemos que $\overline{t}'(s)=\kappa\,\overline{n}$, de donde $\overline{n}=\overline{x}''(s)/\kappa$, luego substituyendo en (17) tendremos

$$\begin{aligned}\tau &= -\langle\frac{\overline{x}''(s)}{\kappa},[\overline{x}'(s)\times\frac{d}{ds}\left(\frac{\overline{x}''}{\kappa}\right)]\rangle\\ &= \frac{-1}{\kappa^2}\langle\overline{x}''(s),[\overline{x}'(s)\times\overline{x}'''(s)]\rangle\\ &= \frac{1}{\kappa^2}\langle\overline{x}'(s),[\overline{x}''(s)\times\overline{x}'''(s)]\rangle\\ &= \frac{(\overline{x}'(s),\overline{x}''(s),\overline{x}'''(s))}{\langle\overline{x}''(s),\overline{x}''(s)\rangle} = \frac{(\overline{x}'(s),\overline{x}''(s),\overline{x}'''(s))}{|\overline{x}''(s)|^2}. \qquad (18)\end{aligned}$$

En la anterior cadena de igualdades nótese que en el paso de la primera a la segunda hemos utilizado el siguiente y obvio resultado

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\overline{x}''(s)}{\kappa(s)}\right) = \frac{\kappa\overline{x}'''(s)-\overline{x}''(s)\kappa'}{\kappa^2} = \frac{1}{\kappa}\,\overline{x}'''(s) - \frac{\kappa'}{\kappa^2}\,\overline{x}''(s).$$

y en consecuencia, como para cualquier $\overline{u}$, $\overline{v}$ se cumple[22] $\langle\overline{u},[\overline{v}\times\overline{u}]\rangle=0$, tendremos que

$$\begin{aligned}\langle\overline{x}''(s),[\overline{x}'(s)\times[a\overline{x}'''(s)+b\overline{x}''(s)]]\rangle &= \langle\overline{x}''(s),[\overline{x}'(s)\times a\overline{x}'''(s)]\rangle + \langle\overline{x}''(s),[\overline{x}'(s)\times b\overline{x}''(s)]\rangle\\ &= a\langle\overline{x}''(s),[\overline{x}'(s)\times\overline{x}'''(s)]\rangle = -a(\overline{x}'(s),\overline{x}''(s),\overline{x}'''(s)).\end{aligned}$$

Para pasar a un parámetro ordinario necesitamos

$$\begin{aligned}\overline{x}'(s) &= \overline{x}'(u)u'(s) = \overline{x}'(u)/|\overline{x}'(u)|\\ \overline{x}''(s) &= \overline{x}''(u)[u'(s)]^2 + \overline{x}'(u)u''(s)\\ \overline{x}'''(s) &= \overline{x}'''(u)\;[u'(s)]^3 + \overline{x}''(u)2u'(s)u''(s) + \overline{x}''u'(s)u''(s) + \overline{x}'(u)u'''(s).\end{aligned}$$

[21] La notación $(\overline{u},\overline{v},\overline{w})$ sirve para representar lo que se denomina producto mixto de tres vectores, es decir $(\overline{u},\overline{v},\overline{w})=\overline{u}\cdot[\overline{v}\times\overline{w}]$ o si se prefiere $\langle\overline{u},[\overline{v}\times\overline{w}]\rangle$.

[22] Las propiedades de $\langle\overline{u},[\overline{v}\times\overline{w}]\rangle$ son triviales si recordamos que $\langle\overline{u},[\overline{v}\times\overline{w}]\rangle = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}$.

Que podemos resumir escribiendo

$$\begin{aligned}\overline{x}'(s) &= \alpha\,\overline{x}'(u)\\ \overline{x}''(s) &= \beta_1\,\overline{x}'(u)+\beta_2\,\overline{x}''(u)\\ \overline{x}'''(s) &= \gamma_1\,\overline{x}'(u)+\gamma_2\,\overline{x}''(u)+\gamma_3\,\overline{x}'''(u).\end{aligned}$$

Al descomponer el producto mixto como suma de $1\times 2\times 3$ determinantes resulta que todos tienen alguna fila repetida salvo el que tiene la primera fila multiplicada por α, la segunda por β_2 y la tercera por γ_3, de donde

$$(\overline{x}'(s),\overline{x}''(s),\overline{x}'''(s))=\alpha\,\beta_2\,\gamma_3\,(\overline{x}'(u),\overline{x}''(u),\overline{x}'''(u)). \tag{19}$$

Volviendo a las expresiones para $\overline{x}'(s),\overline{x}''(s)$ y $\overline{x}'''(s)$ se obtienen los coeficientes:

$$\alpha=\frac{1}{|\overline{x}'(u)|},\qquad \beta_2=\frac{1}{|\overline{x}'(u)|^2},\qquad \gamma_3=[u'(s)]^3=\frac{1}{[s'(u)]^3}=\frac{1}{|\overline{x}'(u)|^3}.$$

Luego $\alpha\beta_2\gamma_3=1/|\overline{x}'(u)|^6$, y utilizando la expresión para $\kappa^2=|\overline{x}''(s)|=\langle\overline{x}''(s),\overline{x}''(s)\rangle$ en función de un parámetro arbitrario probada en la proposición 1.5

$$\langle\overline{x}''(s),\overline{x}''(s)\rangle=\frac{|\overline{x}'(u)\times\overline{x}''(u)|^2}{|\overline{x}'(u)|^6},$$

substituyendo esta última y (19) en (18) resulta

$$\tau=\frac{(\overline{x}'(u),\overline{x}''(u),\overline{x}'''(u))/|\overline{x}'(u)|^6}{|\overline{x}'(u)\times\overline{x}''(u)|^2/|\overline{x}'(u)|^6}=\frac{(\overline{x}'(u),\overline{x}''(u),\overline{x}'''(u))}{|\overline{x}'(u)\times\overline{x}''(u)|^2}.$$

□

Observación 1.14. *Resumiendo, para el parámetro arco tenemos*

$$\begin{aligned}\kappa &= |\overline{x}''(s)|\\ \tau &= \frac{(\overline{x}'(s),\overline{x}''(s),\overline{x}'''(s))}{|\overline{x}''(s)|^2},\end{aligned}$$

y para un parámetro arbitrario

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{|\overline{x}'(u)\times\overline{x}''(u)|}{|\overline{x}'(u)|^3}\\ \tau &= \frac{(\overline{x}'(u),\overline{x}''(u),\overline{x}'''(u))}{|\overline{x}'(u)\times\overline{x}''(u)|^2}.\end{aligned}$$

Proposición 1.9. *La condición necesaria y suficiente para que una curva (que no sea una recta) sea plana es que $\tau(u)=0$, $\forall u$.*

Dem. Si una curva es plana su plano osculador se mantiene invariante y en consecuencia $\overline{b}$ es constante, luego $\overline{b}'(s)=0=-\tau\overline{n}$. Es decir $\tau=0$. Recíprocamente si $\tau=0$, $\overline{b}'(s)=0$, de donde $\overline{b}(s)=\overline{b}_0$ constante. Consideremos la derivada

$$\frac{d}{ds}\langle\overline{x}(s),\overline{b}_0\rangle=\langle\overline{t}(s),\overline{b}_0\rangle=0,$$

En consecuencia integrando, tenemos que para cualquier s, se cumple $\langle \overline{x}(s), \overline{b}_0 \rangle =$ cte., en particular para $s = s_0$. Luego

$$\langle \overline{x}(s), \overline{b}_0 \rangle = \text{cte.} = \langle \overline{x}(s_0), \overline{b}_0 \rangle \implies \langle [\overline{x}(s) - \overline{x}(s_0)], \overline{b}_0 \rangle = 0.$$

La curva se encuentra en el plano $\langle [\overline{x} - \overline{x}(s_0)], \overline{b}_0 \rangle = 0$, que pasa por el punto $\overline{x}(s_0)$ y tiene como vector normal $\overline{b}_0$. □

1.6 Esfera osculatriz

Definición 1.17. *Llamaremos esfera osculatriz a una curva en un punto dado a la esfera límite que pasa por cuatro puntos de la curva que tienden a dicho punto.*

Proposición 1.10. *Si $R = 1/|\kappa(t)|$ y $T = 1/|\tau(t)|$, son los radios respectivamente de curvatura y torsión, entonces el centro y el radio de la esfera osculatriz vienen dados por*

$$C \equiv \overline{x}(u_0) + R(u_0)\, \overline{n}(u_0) + [T(u_0)\ R'(u_0)]\, \overline{b}(u_0), \qquad r = \sqrt{R(u_0)^2 + [T(u_0)R(u_0)']^2}.$$

Observación 1.15. *Es trivial probar que la esfera osculatriz tiene un contacto de orden tres o superior con la curva. También es inmediato que el corte de la esfera con el plano osculador es justamente la circunferencia osculatriz. Su centro se halla en el plano normal sobre una recta paralela a la binormal.*

Si la curva no siendo una circunferencia ($\tau \neq 0$), es de curvatura constante ($\kappa =$ cte.) entonces, resulta obvio a partir de las anteriores ecuaciones, que el centro de la esfera osculatriz coincide con el centro de la circunferencia osculatriz.

1.7 Movimientos rígidos y giros

Enunciemos un par de proposiciones triviales pero necesarias.

Proposición 1.11. *La expresión para un movimiento rígido o traslación de vector $\overline{v} = (a, b, c)$, viene dada por*

$$(x_1, y_1, z_1) = (x_0, y_0, z_0) + (a, b, c).$$

Proposición 1.12. *Las expresiones para los giros en torno a los ejes OZ, OY, OX, de ángulos θ, γ y δ vienen dadas respectivamente por:*

$$(x_1, y_1, z_1) = (x_0, y_0, z_0) \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(x_1, y_1, z_1) = (x_0, y_0, z_0) \begin{pmatrix} \cos\gamma & 0 & \operatorname{sen}\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\gamma & 0 & \cos\gamma \end{pmatrix},$$

$$(x_1, y_1, z_1) = (x_0, y_0, z_0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\delta & -\operatorname{sen}\delta \\ 0 & \operatorname{sen}\delta & \cos\delta \end{pmatrix}.$$

DEM. El resultado es elemental, a título de ejemplo probaremos la expresión para el giro en torno al eje OZ.

Sumar un complejo $z = a + bi$ a los elementos de un conjunto de puntos del plano (puntos de una gráfica, vértices de un polígono, etc,. expresados en forma compleja) equivale a una traslación de vector (a, b).

Multiplicar por un complejo $z = e^{i\theta}$, con $|z| = 1$, representa una rotación de valor θ en torno al origen (y en sentido positivo). Si $|z| \neq 1$, aparece también una homotecia con centro el origen y de razón $|z|$, añadida al giro de valor θ. Tenemos que $T(z) = \alpha z + \beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, es una transformación de semejanza giro+homotecia centro origen+traslación. Podemos obtener con facilidad las ecuaciones del giro de centro el origen más una traslación, sin mas que suponer $|\alpha| = 1$. Si llamamos $z' = T(z) = x' + iy'$, resultará

$$\begin{aligned} x' + y'i &= [(x + yi)(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)] + (a + bi) \\ &= [(x\cos\theta - y \operatorname{sen}\theta) + a] + [(x \operatorname{sen}\theta + y\cos\theta) + b]i, \end{aligned}$$

es decir:

$$\begin{aligned} x' &= (x\cos\theta - y \operatorname{sen}\theta) + a, \\ y' &= (x \operatorname{sen}\theta + y\cos\theta) + b. \end{aligned}$$

Matricialmente y prescindiendo de la traslación quedará girando en sentido positivo

$$(x', y') = (x, y) \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Si efectuamos el giro en sentido de las agujas del reloj (y no en sentido positivo), y nos percatamos que la componente z no varia tendremos la primera expresión del enunciado. Dejando invariante la y, x respectivamente obtenemos las otras dos expresiones. □

Observación 1.16. *Es bien conocido el resultado de Euler*[23] *que nos dice que cualquier transformación ortogonal de los ejes (composición de giros) puede descomponerse en tres giros (ángulos de Euler) respecto de tres rectas que pasan por el origen. Las ecuaciones*[24] *son:*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\operatorname{sen}\psi & 0 \\ \operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi & 0 \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

que podemos esquematizar como: $\overline{x} = (M_{z,\psi} M_{x,\theta} M_{z,\gamma})\overline{x}'$; y que quedará utilizando vectores-fila: $(\overline{x}')^t = (\overline{x})^t (M_{z,\psi} M_{x,\theta} M_{z,\gamma})$, debido a la ortogonalidad señalada.

Ejemplo 1.3. *Las ecuaciones para los giros pueden combinarse con las de la construcción de curvas sobre curvas. Por ejemplo si queremos construir sobre una curva alabeada $\overline{x}(t)$*

[23] Ver cualquier libro de álgebra lineal en el que se estudie la reducción de una cuádrica a sus ejes. Se llama cuádrica a una ecuación del tipo $F(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00}$. Sabemos que tras los oportunos giros y traslaciones se reduce a una de las 17 formas canónicas.

[24] Las matrices $M_{z,\theta}$, $M_{x,\delta}$ o $M_{y,\gamma}$, que ha aparecido en esta sección son ortogonales, es decir sus inversas coinciden con sus traspuestas.

una espiral, situada en el plano normal (de 8 vueltas y situada dentro del disco unidad), pero girando en torno a la tangente, tendríamos

$$\overline{z}(t,\delta) = \overline{x}(t) + \frac{1}{8\pi}[0, u\operatorname{sen} u, u\cos u]\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\delta & -\operatorname{sen}\delta \\ 0 & \operatorname{sen}\delta & \cos\delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{t}(t) \\ \overline{n}(t) \\ \overline{b}(t) \end{pmatrix},$$

obviamente $u \in [0, 8\pi]$. El valor $t \in [0, 2\pi]$ regula la posición sobre la curva alabeada y $\delta \in [0, 2\pi]$, el giro que deseamos proporcionar a la espiral.

1.8 Curvas de enlace mediante polinomios

Los resultados de esta sección son en realidad ejercicios triviales y puede saltarse entera sin menoscabo alguno.

Observación 1.17. *Un problema que surge con cierta frecuencia es el de "enlazar" dos puntos del espacio (sean o no extremos de sendas curvas alabeadas) mediante una curva alabeada. Obviamente si se trata de conectar sin más los puntos $P \equiv [p_1, p_2, p_3]$ y $Q \equiv [q_1, q_2, q_3]$, la solución es trivialmente la recta*[25]

$$\overline{x}(t) = [q_1 t + (1-t)p_1, q_2 t + (1-t)p_2, q_1 t + (1-t)p_1], \ \ t \in [0,1].$$

Puede ocurrir sin embargo que necesitemos que en ambos puntos la tangente a $\overline{x}(t)$ tenga unos ciertos valores, por ejemplo que $\overline{x}'(0) = \overline{r}$ y $\overline{x}'(1) = \overline{s}$. En ese caso tendremos que partir de una curva alabeada con 12 coeficientes indeterminados, 3 por componente, es decir

$$\overline{x}(t) = [a_1 + a_2 t + a_3 t^2 + a_4 t^3, b_1 + b_2 t + b_3 t^2 + b_4 t^3, c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 t^3],$$

y plantear el sistema de 12 ecuaciones con 12 incógnitas

$$\overline{x}(0) = \overline{p}, \ \ \overline{x}'(0) = \overline{r}, \ \ \overline{x}(1) = \overline{q}, \ \ \overline{x}'(1) = \overline{s}.$$

Este sistema es más sencillo de resolver de lo que parece inicialmente si aprovechamos desde el principio las condiciones en $t = 0$. Veamos:

Proposición 1.13. *Dada la ecuación*

$$\overline{x}(t) = [a_1 + a_2 t + a_3 t^2 + a_4 t^3, b_1 + b_2 t + b_3 t^2 + b_4 t^3, c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 t^3],$$

y las condiciones $\overline{x}(0) = \overline{p}$, $\overline{x}'(0) = \overline{r}$, $\overline{x}(1) = \overline{q}$, $\overline{x}'(1) = \overline{s}$. Entonces el sistema planteado siempre es determinado y además su solución viene dada por

$$[a_1, b_1, c_1] = [p_1, p_2, p_3], \ \ [a_2, b_2, c_2] = [r_1, r_2, r_3],$$

y por

$$\begin{aligned} a_3 &= 3q_1 - 3p_1 - 2r_1 - s_1, & a_4 &= 2p_1 - 2q_1 + r_1 + s_1 \\ b_3 &= 3q_2 - 3p_2 - 2r_2 - s_2, & b_4 &= 2p_2 - 2q_2 + r_2 + s_2 \\ c_3 &= 3q_3 - 3p_3 - 2r_3 - s_3, & c_4 &= 2p_3 - 2q_3 + r_3 + s_3. \end{aligned}$$

[25] Combinando esta función con la función de **Heaviside**$((t-a)(b-t))$ que vale 1 en (a,b) y 0 en $\mathbb{R} \setminus [a,b]$, se puede dar una expresión cómoda para las ecuaciones paramétricas de cualquier polígono de vértices $\{\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \ldots, \overline{\alpha}_n\}$, como $\overline{x}(t) = \sum_{k=1}^{n-1}\textbf{Heaviside}((k+1-t)(t-k))((t-k)\overline{\alpha}_{k+1} + (k+1-t)\overline{\alpha}_k)$, con $t \in [0,n]$

DEM. Partiendo de

$$\overline{x}(t) = [a_1 + a_2t + a_3t^2 + a_4t^3, b_1 + b_2t + b_3t^2 + b_4t^3, c_1 + c_2t + c_3t^2 + c_4t^3],$$

y de su derivada

$$\overline{x}'(t) = [a_2 + 2a_3t + 3a_4t^2, b_2 + 2b_3t + 3b_4t^2, c_2 + 2c_3t + 3c_4t^2],$$

particularizando en $t = 0$, y utilizando $\overline{x}(0) = \overline{p}$ y $\overline{x}'(0) = \overline{r}$, resultan de inmediato

$$[a_1, b_1, c_1] = [p_1, p_2, p_3], \quad [a_2, b_2, c_2] = [r_1, r_2, r_3].$$

Para $t = 1$ se han de cumplir $\overline{x}(1) = \overline{q}$ y $\overline{x}'(1) = \overline{s}$, substituyendo directamente los valores arriba obtenidos, resultan 3 sistemas lineales análogos de 2×2, que son:

$$\begin{aligned} a_3 + a_4 &= q_1 - p_1 - r_1 & b_3 + b_4 &= q_2 - p_2 - r_2 & c_3 + c_4 &= q_3 - p_3 - r_3 \\ 2a_3 + 3a_4 &= s_1 - r_1 & 2b_3 + 3b_4 &= s_2 - r_2 & 2c_3 + 3c_4 &= s_3 - r_3. \end{aligned}$$

Como se cumple

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

estos tres sistemas siempre son determinados. Aplicando la regla de Cramer al primero, resulta

$$\begin{aligned} a_3 &= \begin{vmatrix} q_1 - p_1 - r_1 & 1 \\ s_1 - r_1 & 3 \end{vmatrix} = 3q_1 - 3p_1 - 2r_1 - s_1, \\ a_4 &= \begin{vmatrix} 1 & q_1 - p_1 - r_1 \\ 2 & s_1 - r_1 \end{vmatrix} = 2p_1 - 2q_1 + r_1 + s_1. \end{aligned}$$

Como los tres sistemas son idénticos, solo hay que cambiar los índices y tenemos las fórmulas del enunciado. □

Observación 1.18. *El que las tangentes coincidan para $t = 0$ y $t = 1$ puede no ser suficiente, sobre todo si deseamos que la curvatura se mantenga continua, eso exigiría la igualdad de las derivadas segundas en dichos puntos. Se parte entonces*[26] *de una curva con 18 coeficientes*

$$\begin{aligned} \overline{x}(t) = [&a_1 + a_2t + a_3t^2 + a_4t^3 + a_5t^4 + a_6t^5, \\ &b_1 + b_2t + b_3t^2 + b_4t^3 + b_5t^4 + b_6t^5, c_1 + c_2t + c_3t^2 + c_4t^3 + c_5t^4 + c_6t^5], \end{aligned}$$

y resulta el sistema de 18 ecuaciones con 18 incógnitas siguiente

$$\overline{x}(0) = \overline{p}, \ \ \overline{x}'(0) = \overline{r}, \ \ \overline{x}''(0) = \overline{u}, \ \ \overline{x}(1) = \overline{q}, \ \ \overline{x}'(1) = \overline{s}, \ \ \overline{x}''(1) = \overline{v}.$$

Del mismo modo el sistema anterior es más simple de lo que parece y podemos establecer la siguiente proposición.

[26] Una solución diferente para este problema es la utilización de splines cúbicos. Los splines cúbicos, son curvas formadas por varios tramos de polinomios cúbicos, que enlazan con contactos de clase 2; es decir, con curvatura continua (ver capítulo de complementos), tienen ventaja sobre los enlaces arriba descritos, ya que podemos obligarlos a pasar por determinados puntos sin aumentar el grado.

Proposición 1.14. *Dada la ecuación*

$$\overline{x}(t) = [a_1 + a_2 t + a_3 t^2 + a_4 t^3 + a_5 t^4 + a_6 t^5,\\ b_1 + b_2 t + b_3 t^2 + b_4 t^3 + b_5 t^4 + b_6 t^5, c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 t^3 + c_5 t^4 + c_6 t^5],$$

y las condiciones

$$\overline{x}(0) = \overline{p},\ \ \overline{x}'(0) = \overline{r},\ \ \overline{x}''(0) = \overline{u},\ \ \overline{x}(1) = \overline{q},\ \ \overline{x}'(1) = \overline{s},\ \ \overline{x}''(1) = \overline{v}.$$

Entonces el sistema planteado siempre es determinado y además su solución viene dada por

$$[a_1, b_1, c_1] = [p_1, p_2, p_3],\ \ [a_2, b_2, c_2] = [r_1, r_2, r_3],\ \ [a_3, b_3, c_3] = \frac{1}{2}[u_1, u_2, u_3],$$

y por

$$\begin{aligned}
a_4 &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} q_1 - p_1 - r_1 - \frac{u_1}{2} & 1 & 1 \\ s_1 - r_1 - u_1 & 4 & 5 \\ v_1 - u_1 & 12 & 20 \end{vmatrix}, \\
a_5 &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & q_1 - p_1 - r_1 - \frac{u_1}{2} & 1 \\ 3 & s_1 - r_1 - u_1 & 5 \\ 6 & v_1 - u_1 & 20 \end{vmatrix}, \\
a_6 &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & q_1 - p_1 - r_1 - \frac{u_1}{2} \\ 3 & 4 & s_1 - r_1 - u_1 \\ 6 & 12 & v_1 - u_1 \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

y por las ecuaciones análogas para b_3, b_4, b_5 y c_3, c_4, c_5 que resultan de las tres anteriores substituyendo adecuadamente los índices.

Dem. Si trabajamos para simplificar con la primera componente de $\overline{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]$, tendremos

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= a_1 + a_2 t + a_3 t^2 + a_4 t^3 + a_5 t^4 + a_6 t^5 && (20)\\
x_1'(t) &= a_2 + 2a_3 t + 3a_4 t^2 + 4a_5 t^3 + 5a_6 t^4 && (21)\\
x_1''(t) &= 2a_3 + 6a_4 t + 12a_5 t^2 + 20a_6 t^3. && (22)
\end{aligned}$$

Las condiciones $x_1(0) = p_1$, $x_1'(0) = r_1$ y $x_1''(0) = u_1$, nos conducen directamente a las relaciones

$$a_1 = p_1,\ \ a_2 = r_1,\ \ a_3 = \frac{1}{2}u_1. \qquad (23)$$

Para obtener a_4, a_5, a_6, hacemos $t = 1$ en (20,21, 22), y substituyendo los valores obtenidos en (23), resulta el sistema

$$\begin{aligned}
a_4 + a_5 + a_6 &= q_1 - p_1 - r_1 - \frac{u_1}{2}\\
3a_4 + 4a_5 + 5a_6 &= s_1 - r_1 - u_1\\
6a_4 + 12a_5 + 20a_6 &= v_1 - u_1.
\end{aligned}$$

El determinante de la matriz de coeficientes será

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 12 & 20 \end{vmatrix} = 2,$$

por lo que este sistema y los dos análogos correspondientes a b_4, b_5, b_6 y c_4, c_5, c_6 son siempre determinados, y las soluciones obviamente son las del enunciado.

□

1.9 Formulas de Frenet-Serret

Proposición 1.15. *Si $\overline{x}(s)$ es una curva regular con curvatura $\kappa(s)$ no nula, entonces*

$$\begin{pmatrix} \overline{t}'(s) \\ \overline{n}'(s) \\ \overline{b}'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{t}(s) \\ \overline{n}(s) \\ \overline{b}(s) \end{pmatrix} \tag{24}$$

Dem. Hemos probado, ver (8) y (16), que $\overline{t}'(s) = \kappa\overline{n}$, y $\overline{b}'(s) = -\tau\overline{n}$. Puede completarse esta información expresando el valor $\overline{n}'(s)$ en función de los vectores unitarios, la curvatura y la torsión. Si derivamos en $\langle\overline{n}(s), \overline{n}(s)\rangle = 1$, resulta que $\langle\overline{n}'(s), \overline{n}(s)\rangle = 0$, luego $\overline{n}'(s)$ está en el plano rectificante. Puede expresarse $\overline{n}'(s)$ en función de $\overline{t}$ y $\overline{b}$. Escribamos

$$\overline{n}'(s) = \alpha_1\overline{t}(s) + \alpha_2\overline{b}(s). \tag{25}$$

Multipliquemos (25) por $\overline{t}$, resulta $\langle\overline{n}', \overline{t}\rangle = \alpha_1$. Derivando $\langle\overline{n}(s), \overline{t}(s)\rangle = 0$, respecto de s, tenemos que $\langle\overline{n}', \overline{t}\rangle + \langle\overline{n}, \overline{t}'\rangle = 0$, de donde

$$\begin{aligned} \langle\overline{n}', \overline{t}\rangle &= -\langle\overline{t}', \overline{n}\rangle \\ &= \langle\kappa\,\overline{n}, \overline{n}\rangle = -\kappa. \end{aligned}$$

Por otro lado multiplicando (25) por $\overline{b}$, tenemos $\langle\overline{n}', \overline{b}\rangle = \alpha_2$. Derivando ahora $\langle\overline{n}(s), \overline{b}(s)\rangle = 0$, resulta que $\langle\overline{n}, \overline{b}'\rangle + \langle\overline{n}', \overline{b}\rangle = 0$, luego

$$\begin{aligned} \langle\overline{n}', \overline{b}\rangle &= -\langle\overline{n}, \overline{b}'\rangle \\ &= -\langle\overline{n}, -\tau\,\overline{n}\rangle = \tau. \end{aligned}$$

Luego $\alpha_1 = -\kappa$, y $\alpha_2 = \tau$, podemos escribir por tanto

$$\overline{n}' = -\kappa\,\overline{t} + \tau\,\overline{b}. \tag{26}$$

Organizando el producto matricial con esta fórmula y las (16) y (8), señaladas al comienzo, queda probada la proposición. □

Observación 1.19. *Sabemos que conocida $\overline{x}(s)$, podemos obtener fácilmente $\kappa(s)$ y $\tau(s)$, mediante las fórmula obtenidas en (10) y (18). Recíprocamente las fórmulas de Frenet-Serret (24), unidas a la ecuación $\overline{x}'(s) = \overline{t}(s)$, forman un sistema de 12 ecuaciones ($3 \times 3 + 3$) diferenciales tal que, conocidas las funciones $\kappa(s)$ y $\tau(s)$, permiten obtener $\overline{x}(s)$ salvo un movimiento rígido.*

Con los requerimiento habituales se cumplirá el teorema de existencia y unicidad de soluciones. En el teorema siguiente presupondremos la existencia de soluciones y probaremos la unicidad, esa unicidad se conoce como "Teorema Fundamental de la teoría de Curvas".

Observación 1.20. *Las ecuaciones de Frenet-Serret respecto de un parámetro arbitrario u, serán* $\overline{t}'_u(u) = \overline{t}'_s(s(u))s'(u)$, $\overline{n}'_u(u) = \overline{n}'_s(s(u))s'(u)$, $\overline{b}'_u(u) = \overline{b}'_s(s(u))s'(u)$, *recuérdese que* $s'(u) = |\overline{x}'(u)|$, *y que con esta notación* $\overline{t}'_s(s(u)) = \kappa(u)\overline{n}(u)$, *etc.,*

1.10 Ecuación intrínseca. Teorema Fundamental

Definición 1.18. *Se denominan ecuaciones intrínsecas de una curva a las fórmulas que nos dan la curvatura* $\kappa = \kappa(s)$ *y la torsión* $\tau = \tau(s)$ *en función del parámetro arco, e independientemente de cualquier sistema de referencia.*

Teorema 1.1. *(Teorema Fundamental)*

Dadas dos funciones $\kappa(s), \tau(s) : I \longrightarrow \mathbb{R}$, *con* $\kappa(s) \neq 0$, *existe una única curva, determinada salvo movimientos (giros y traslaciones), para la cual s es el arco, medido a partir de un cierto punto de la curva,* $\kappa(s)$ *es la curvatura y* $\tau(s)$ *la torsión.*

Dem. Una demostración completa de este teorema requiere el teorema de existencia y unicidad de las soluciones de una ecuación diferencial ordinaria. Puede darse una demostración de la unicidad de curvas –salvo un movimiento– (ver [5] pág. 33), que tienen los mismos s, $\kappa(s)$ y $\tau(s)$, más sencilla.

En primer lugar es necesario probar que la longitud de arco, la curvatura y la torsión son invariantes bajo movimientos rígidos (traslaciones y giros). Esto es inmediato ya que hemos visto y probado que tanto κ como τ pueden determinarse en función del parámetro arco y por tanto son intrínsecos. Veamos la longitud, supongamos que $M : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es un movimiento rígido y que $\overline{x}(t)$ es una curva parametrizada, y que $M \circ \overline{x}(t)$ es la curva transformada, entonces

$$s = \int_a^b |\frac{d\overline{x}}{dt}|dt = \int_a^b \sqrt{\langle \overline{x}'(t), \overline{x}'(t)\rangle}dt = \int_a^b |\frac{d(M \circ \overline{x})}{dt}|dt.$$

Lo que es evidente, puesto que la longitud se define mediante el anterior producto escalar de $\overline{x}'(t)$ (y las derivadas son invariantes bajo traslaciones y los productos escalares y vectoriales se expresan por medio de longitudes y ángulos entre vectores, así que también son invariantes bajo movimientos rígidos).

Supongamos que dos curvas $\overline{x}(s)$ y $\overline{y}(s)$ son solución (presuponemos existencia) del anterior sistema de ecuaciones, satisfaciendo las condiciones $\kappa_x(s) = \kappa_y(s)$ y $\tau_x(s) = \tau_y(s)$, $\forall s \in I$. Vamos a probar que coinciden salvo por un movimiento rígido.

Sean $\{\overline{t}_x(s_0), \overline{n}_x(s_0), \overline{b}_x(s_0)\}$ y $\{\overline{t}_y(s_0), \overline{n}_y(s_0), \overline{b}_y(s_0)\}$ los triedros de Frenet de $\overline{x}(s)$ y $\overline{y}(s)$ en $s = s_0$. Claramente existe una traslación que transforma $\overline{y}(s_0)$ en $\overline{x}(s_0)$ y un giro con el que conseguimos que $\overline{t}_y(s_0) = \overline{t}_x(s_0)$, $\overline{n}_y(s_0) = \overline{n}_x(s_0)$ y $\overline{b}_y(s_0) = \overline{b}_x(s_0)$. Los triedros de Frenet en un punto arbitrario s (cuya dependencia de s no escribimos para no recargar la notación), serán $\{\overline{t}_y, \overline{n}_y, \overline{b}_y\}$ y $\{\overline{t}_x, \overline{n}_x, \overline{b}_x\}$, obviamente no tienen porqué coincidir, pero lo que si sabemos es que satisfacen las ecuaciones de Frenet-Serret. Por hipótesis tenemos

$\kappa = \kappa_x = \kappa_y$ y $\tau = \tau_x = \tau_y$, podemos escribirlas en la forma

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{d\overline{t}_x}{ds} & = & \kappa\overline{n}_x \\[2ex] \dfrac{d\overline{n}_x}{ds} & = & -\kappa\overline{t}_x + \tau\overline{b}_x \\[2ex] \dfrac{d\overline{b}_x}{ds} & = & -\tau\overline{n}_x \end{array}\right. \quad \text{y} \quad \left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{d\overline{t}_y}{ds} & = & \kappa\overline{n}_y \\[2ex] \dfrac{d\overline{n}_y}{ds} & = & -\kappa\overline{t}_y + \tau\overline{b}_y \\[2ex] \dfrac{d\overline{b}_y}{ds} & = & -\tau\overline{n}_y, \end{array}\right.$$

con condiciones iniciales $\overline{t}_x(s_0) = \overline{t}_y(s_0)$, $\overline{n}_x(s_0) = \overline{n}_y(s_0)$ y $\overline{b}_x(s_0) = \overline{b}_y(s_0)$. Para ver lo que ocurre en punto diferente del $\overline{x}(s_0) = \overline{y}(s_0)$ evaluamos $\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{ds}\{|\overline{t}_x - \overline{t}_y|^2 + |\overline{b}_x - \overline{b}_y|^2 + |\overline{n}_x - \overline{n}_y|^2\}$, utilizando las ecuaciones de Frenet-Serret. Tenemos

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{ds}\{|\overline{t}_x - \overline{t}_y|^2 + |\overline{b}_x - \overline{b}_y|^2 + |\overline{n}_x - \overline{n}_y|^2\} & = & \langle \overline{t}_x - \overline{t}_y, \overline{t}_x' - \overline{t}_y' \rangle + \langle \overline{b}_x - \overline{b}_y, \overline{b}_x' - \overline{b}_y' \rangle \\ & & + \langle \overline{n}_x - \overline{n}_y, \overline{n}_x' - \overline{n}_y' \rangle \\ & = & \kappa \, \langle \overline{t}_x - \overline{t}_y, \overline{n}_x - \overline{n}_y \rangle - \tau \, \langle \overline{b}_x - \overline{b}_y, \overline{n}_x - \overline{n}_y \rangle \\ & & -\kappa \, \langle \overline{n}_x - \overline{n}_y, \overline{t}_x - \overline{t}_y \rangle + \tau \, \langle \overline{n}_x - \overline{n}_y, \overline{b}_x - \overline{b}_y \rangle \\ & = & 0. \end{array}$$

Lo que sucede para todo $s \in I$. Por tanto la expresión de arriba es constante, y puesto que es cero para $s = s_0$, es idénticamente cero para cualquier otro valor de s. Se sigue que $\overline{t}_x(s) = \overline{t}_y(s)$, $\overline{n}_x(s) = \overline{n}_y(s)$ y $\overline{b}_x(s) = \overline{b}_y(s)$ para todo $s \in I$, ya que $\overline{x}'(s) = \overline{t}_x = \overline{t}_y = \overline{y}'(s)$, y resulta

$$\frac{d}{ds}(\overline{x}(s) - \overline{y}(s)) = 0.$$

De donde $\overline{x}(s) = \overline{y}(s) + \overline{a}$, donde $\overline{a}$ es un vector constante. Como $\overline{x}(s_0) = \overline{y}(s_0)$, tenemos que $\overline{a} = 0$, de aquí, $\overline{x}(s) = \overline{y}(s)$ para todo $s \in I$. $\square$

Observación 1.21. *En el plano las ecuaciones de Frenet-Serret pasan a ser de un sistema diferencial de* 12 *ecuaciones a uno de* 4 *ecuaciones (2 por componente), tendremos:*

$$\left\{\begin{array}{lcl} \overline{x}'(s) & = & \overline{t}(s) \\ \overline{t}'(s) & = & \kappa(s)\overline{n}(s) \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} \overline{x}'(s) & = & \overline{t}(s) \\ |\overline{t}'(s)| & = & \kappa(s) \end{array}\right.$$

El vector tangente unitario, si $\theta(s)$ es el ángulo que forma la tangente a la curva con el eje OX, será

$$\begin{array}{rcl} \overline{t}(s) = [\cos(\theta(s)), \sin(\theta(s))] & \Rightarrow & \overline{t}'(s) = [-\sin(\theta(s)), \cos(\theta(s))]\ \theta'(s) \\ & \Rightarrow & |\overline{t}'(s)| = \theta'(s), \end{array}$$

utilizando las ecuaciones de Frenet-Serret resulta[27] *que $\theta'(s) = \kappa(s)$. Como $\overline{x}'(s) = \overline{t}(s)$, vemos que $x(s)$ e $y(s)$ pueden determinarse mediante dos cuadraturas:*

$$\theta(s) = \int_{s_0}^{s} \kappa(s)\ ds, \quad x(s) = \int_{s_0}^{s} \cos(\theta(s))\ ds, \quad y(s) = \int_{s_0}^{s} \mathrm{sen}(\theta(s))\ ds.$$

[27] A esta expresión podríamos haber llegado por un camino más simple utilizando la definición intuitiva y cartesiana $\frac{d\theta(s)}{ds} = \kappa(s)$.

Planteado como sistema diferencial toma la forma

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'(s) & = & \cos(\theta(s)) \\ y'(s) & = & \operatorname{sen}(\theta(s)) \\ \theta'(s) & = & \kappa(s), \end{array}\right. \quad con \quad \left\{\begin{array}{rcl} x(s_0) & = & x_0 \\ y(s_0) & = & y_0 \\ \theta(s_0) & = & \theta_0. \end{array}\right. \tag{27}$$

Un cambio en las constantes de integración x_0 e y_0 representa una traslación; mientras que un cambio de la constante de θ_0 significa una rotación de la curva.

Un ejercicio trivial es suponer $\kappa(s) = cte.$ y obtener las ecuaciones cartesianas utilizando las relaciones anteriores. Los paquetes matemáticos suelen incorporar ordenes para dibujar las soluciones (es claro que numéricamente) de la EDO's anterior, y que en este caso resulta particularmente transparentes. En Maple serían:

```
>  DEplot([diff(x(s),s)=cos(theta(s)),diff(y(s),s)= sin(theta(s)),diff(theta(s),s)=1],
>  [x(s),y(s),theta(s)], s=-10..10,[[x(0)=0,y(0)=0,theta(0)=0]],
>  stepsize=0.05,scene=[x(s),y(s)],scaling=constrained);
```

Observación 1.22. *Análogamente en el espacio, conocidas las funciones $\kappa(s)$ y $\tau(s)$, aplicando las fórmulas de Frenet-Serret y resolviendo el sistema de ecuaciones diferenciales (28) se puede obtener la curva unívocamente determinada en el espacio salvo traslaciones y/o giros. Al añadir $\overline{x}'(s) = \overline{t}(s)$, resulta el sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \overline{x}'(s) & = & \overline{t}(s) \\ \overline{t}'(s) & = & \kappa(s)\overline{n} \\ \overline{n}'(s) & = & -\kappa(s)\overline{t}(s) + \tau(s)\overline{b}(s) \\ \overline{b}'(s) & = & -\tau(s)\overline{n}(s), \end{array}\right. \quad con \quad \left\{\begin{array}{rcl} \overline{x}(s_0) & = & \overline{p} \\ \overline{t}(s_0) & = & \overline{q} \\ \overline{n}(s_0) & = & \overline{r} \\ \overline{b}(s_0) & = & \overline{q} \times \overline{r}. \end{array}\right. \tag{28}$$

Que pueden escribirse escalarmente como un sistema diferencial de 12 *ecuaciones y que en Maple son algo más trabajosas de escribir:*

```
>  DEplot3d([diff(x(s),s)=t1(s),diff(y(s),s)=t2(s),diff(z(s),s)=t3(s),
>  diff(t1(s),s)=kappa(s)*n1(s),diff(t2(s),s)=kappa(s)*n2(s),diff(t3(s),s)=kappa(s)*n3(s),
>  diff(n1(s),s)=-kappa(s)*t1(s)+tau(s)*b1(s),
>  diff(n2(s),s) =-kappa(s)*t2(s)+tau(s)*b2(s),
>  diff(n3(s),s)=-kappa(s)*t3(s)+tau(s)*b3( s),
>  diff(b1(s),s)=-tau(s)*n1(s),diff(b2(s),s)=-tau(s)*n2(s),diff(b3(s),s)=-tau(s)*n3(s)],
>  [x(s),y(s),z(s),t1(s),t2(s),t3(s),n1(s),n2(s),n3(s), b1(s),b2(s),b3(s)],
>  s=-4*Pi..4*Pi,
>  [[x(0)=0,y(0)=0,z(0)=0,t1(0)=1,t2(0)=0,t3(0)=0,n1(0)=0,n2(0)=1,n3(0)=0
>  ,b1(0)=0,b2(0)=0,b3(0)=1]],
>  y=0..4,z=0..8,scene=[x(s),y(s),z(s)],stepsize=0.1);
```

1.11 Curvas derivadas: envolvente, cáustica, pedal

Definición 1.19. *La envolvente[28] de una familia de curvas dependientes de un parámetro es una curva tangente a todas las curvas de la familia. La ecuación se obtiene eliminando el parámetro que caracteriza a la familia entre la ecuación de esta y su derivada respecto del parámetro.*

[28] Si una familia de curvas tiene envolvente, cada individuo de la familia recibe el nombre de “involuta” respecto de la envolvente.

Ejemplo 1.4. *Es un sencillo ejercicio probar que la envolvente de un segmento móvil de longitud a cuyos extremos se apoyan sobre los ejes es la astroide*[29] $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Ejemplo 1.5. *La envolvente de la familia de circunferencias* $(x-\cos\lambda)^2+(y-\operatorname{sen}\lambda)^2 = 1$, *es a su vez la circunferencia* $x^2 + y^2 = 4$.

Definición 1.20. *Si C es una curva y O un punto (el punto pedal o polo), el lugar geométrico S del pie de la perpendicular trazada desde O a la tangente a un punto variable sobre C, se denomina curva pedal de C respecto de O.*

Ejemplo 1.6. *Puede calcularse que la pedal de una circunferencia supuesto el polo sobre ella es siempre una cardioide. Si el polo estuviera fuera sería un caracol de Pascal*

Definición 1.21. *La caústica*[30] *de una curva dada C es la envolvente de los rayos emitidos desde un punto fuente S después de reflejarse (cáustica de reflexión: catacáustica) o refractarse (cáustica de refracción: diacaústica) en C. Si S está en el infinito, los rayos incidentes son paralelos.*

Ejemplo 1.7. *La catacáustica de una circunferencia, suponiendo el origen de los rayos en el infinito es una nefroide. La catacáustica de* $y = \ln x$ *con rayos paralelos al eje es una catenaria. Para más ejemplos ver el apéndice de [4].*

[29]La astroide es una hipocicloide, que es una subfamilia de las hipotrocoides, y resulta de hacer $h = b$, (h es la distancia de P al centro de la circunferencia móvil) en la ecuación general de aquellas. Dentro de esa subfamilia (siendo $n = a - b$, a y b los radios de las circunferencias fija y móvil), es la que toma el valor $a = 4b$. Son también hipocicloides: la deltoide $a = 3b$, el segmento $a = 2b$, o la circunferencia $b = 0$. Para $h \neq b$ y $a = 2b$ tenemos la elipse y para $a = 2nh/(n + 1)$ y $b = (n - 1)h/(n + 1)$ la rosa de n pétalos. Las ecuaciones generales de las curvas hipotrocoides y epitrocoides son respectivamente $\overline{x}(t) = [n\cos t + h\cos\frac{n}{b}t, n\operatorname{sen} t - h\operatorname{sen}\frac{n}{b}t]$, y $\overline{x}(t) = [m\cos t - h\cos\frac{m}{b}t, m\operatorname{sen} t - h\operatorname{sen}\frac{m}{b}t]$, con $t \in [-\pi, \pi]$. Las epicicloides son una subfamilia de las epitrocoides y se obtienen haciendo $h = b$. Epicicloides son la cardioide que se obtiene haciendo $a = b$ (siendo $m = a + b$, a y b radios), y la nefroide si escogemos $a = 2b$. Para más detalles ver el capítulo VI de [4].

[30]Es decir "candente", puesto que la luz se concentra en ella. El arco iris en el cielo se debe a una cáustica de un sistema de rayos que han pasado a través de una gota de agua con reflexión interna completa. El estudio de los frentes de onda tridimensionales, sus metamorfosis y sus singularidades (autointersecciones de los frentes de onda o cúspides de las cáusticas) es objeto de la moderna teoría de catástrofes. Las singularidades de las cáusticas puede probarse que solo son de tres tipos: "cola de milano", "pirámide" (u ombligo elíptico) y "bolsillo" (u ombligo hiperbólico). Para una extensa bibliografía sobre este tema, consultar *Teoría de catástrofes*, de V.I. Arnold, Ed. Alianza Univ.

2 Teoría elemental de superficies

2.1 Expresión analítica. Curvas coordenadas

Definición 2.1. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$, se dice que S es una superficie regular, si y solo si, $\forall \overline{a} \in S$ existe un conjunto abierto V, tal que $\overline{a} \in V \subset \mathbb{R}^3$, y una función $\overline{x} : U \longrightarrow V \cap S$, donde U es un abierto de $\mathbb{R}^2$, verificando las siguientes condiciones:*

i) *$\overline{x}$ es de clase infinito, esto es dada*

$$\overline{x}(u, v) = [x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)], \tag{29}$$

las funciones $x_i(u, v)$ tienen derivadas parciales de todos los órdenes.

ii) *$\overline{x} : U \longrightarrow (V \cap S)$ es un homeomorfismo, es decir una aplicación biyectiva continua con inversa $\overline{x}^{-1} : (V \cap S) \longrightarrow U$ continua. Esto significa que $\overline{x}^{-1}$ es la restricción a $V \cap S$ de una función continua de $W \longrightarrow \mathbb{R}^2$, para algún conjunto abierto $W \subset \mathbb{R}^3$ que contiene a $V \cap S$.*

iii) *La matriz Jacobiana*

$$J(\overline{x}(u, v)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial x_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x_2}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial x_3}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial x_3}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}$$

tiene rango 2. Esto es, para todo valor $(u, v) \in U$, $J(\overline{x}(u, v)) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, es una aplicación lineal inyectiva, o equivalentemente $\ker J(\overline{x}(u, v)) = \{\overline{0}\}$. Esta exigencia sobre $\overline{x}$ es lo que se denomina regularidad.

La función $\overline{x} : U \longrightarrow S$ se denomina[31] **carta** *coordenada o* parametrización *de S. Cometiendo un abuso de lenguaje tradicional nos referiremos frecuentemente a la* **superficie** *$\overline{x}(u, v)$.*

Observación 2.1. *Las cartas coordenadas nos permiten introducir coordenadas para puntos de una superficie cercanas a un cierto punto dado $\overline{a}$. Podemos pensar en una carta $\overline{x} : (U \subset \mathbb{R}^2) \longrightarrow S$ como la correspondencia entre un territorio S y el mapa que lo describe.*

Observación 2.2. *A veces relajaremos la anterior definición de superficie, prescindiendo de las exigencias apuntadas. Se pedirá casi siempre que $\overline{x}(u, v)$ tenga al menos clase 1, con objeto de que tenga sentido la matriz J, utilizando ese hecho junto con iii) para que exista plano tangente en casi todo punto.*

Se prescindirá en ocasiones de ii) cuyo objeto es evitar autointersecciones[32]*. También permitiremos que haya puntos*[33] *en los que $\mathrm{ran}(J) < 2$ aunque exigiremos siempre que la clase de $\overline{x}(u, v)$ sea 0, es decir que las funciones componentes sean continuas. A los puntos en los que falla i), ii) o iii) los llamaremos genéricamente puntos singulares, hablaremos todavía de superficie pero omitiremos el adjetivo regular. En los puntos donde $\mathrm{ran}(J) = 2$ y la clase es mayor o igual que 1 diremos que la superficie es regular.*

[31] patch en inglés

[32] Por ejemplo $\overline{x}(u, v) = [\sin(u), \sin(2u), v]$, a lo largo de la recta $u = 0$.

[33] Pero no que en todos los puntos $\mathrm{ran}(J) < 2$, ver observación 3.8.

Observación 2.3. *En ocasiones una superficie puede venir dada por una función implícita $F(x, y, z) = 0$, en vez de la forma paramétrica explícita (29) o la forma cartesiana (que paramétricamente queda*[34] $\overline{x}(x, y) = [x, y, f(x, y)]$*). Como es sabido, dada $F(x, y, z) = 0$, las condiciones que regulan la existencia o no de una función definida implícitamente las proporciona el teorema de la función implícita (ver cualquier texto de cálculo).*

Ejemplo 2.1. *Antes de proseguir veamos una forma trivial de engendrar superficies a partir de curvas que nos ayudará a entender las ecuaciones en paramétricas de algunas superficies. Si partimos de una curva de ecuaciones paramétricas $\overline{x}(t) = [x_1(t),\ x_2(t)]$, la ecuación de la superficie de revolución que resulta de hacerla girar en torno al eje OX, es*

$$\overline{x}(t, u) = [x_1(t),\ x_2(t)\cos u,\ x_2(t)\operatorname{sen} u].$$

Análogamente si giramos dicha curva en torno al eje OY resulta

$$\overline{x}(t, u) = [x_1(t)\cos u,\ x_2(t),\ x_1(t)\operatorname{sen} u].$$

Veamos algunos ejemplos:

i) Un cono resulta engendrado al girar un segmento en torno al eje OX, es decir de $\overline{x}(t) = [t,\ at + b]$ obtendremos

$$\overline{x}(t, u) = [t,\ (at + b)\ \cos u,\ (at + b)\ \operatorname{sen} u].$$

ii) Del mismo modo la circunferencia engendra una esfera. A partir de $\overline{x}(t) = [r\ \operatorname{sen} t,\ r\ \cos t]$, resulta

$$\overline{x}(t, u) = [r\ \operatorname{sen} t, r\ \cos t\ \cos u, r\ \cos t\ \operatorname{sen} u].$$

iii) Podemos generar un cilindro, si hacemos $a = 0$, y $b = r$ en la ecuación de la recta anterior, tendremos $\overline{x}(t) = [t, r]$, que al girar en torno al eje OX, proporciona

$$\overline{x}(t, u) = [t,\ r\cos u,\ r\ \operatorname{sen} u].$$

iv) Finalmente, si hacemos girar una circunferencia $\overline{x}(t) = [r\cos(t), r\operatorname{sen}(t) + R]$, con $r < R$, es decir cuyo centro tenga una ordenada mayor que el radio, tendremos las ecuaciones paramétricas de un toro

$$\overline{x}(t, u) = [r\cos(t), (r\operatorname{sen}(t) + R)\cos(u), (r\operatorname{sen}(t) + R)\operatorname{sen}(u)].$$

Más adelante, cuando tengamos más herramientas, estudiaremos otras propiedades de las superficies de revolución. Quizás la más interesante es que las líneas de curvatura de las superficies de revolución son sus meridianos[35] *y paralelos, ver la página 71 de estas mismas notas.*

Observación 2.4. *Cuando para todo punto (u, v), el rango de la matriz J es 1, como ocurre con*

$$\overline{x}(u, v) = [u + v, (u + v)^2, (u + v)^3],$$

las ecuaciones representan una curva.

---

[34] Esta parametrización se conoce como parametrización de Monge.

[35] Se denominan meridianos y paralelos de una superficie de revolución a las curvas que resultan de intersecar la superficie con planos que contengan a su eje de revolución, o respectivamente, sean perpendiculares al mismo, en analogía con la esfera.

Observación 2.5. *Los puntos singulares pueden aparecer debido a la elección del sistema de parámetros o por la naturaleza de la superficie. Por ejemplo la esfera*[36] *de radio* a*,*

$$\overline{x}(u,v) = [a\cos u\cos v, a\cos u \operatorname{sen} v, a \operatorname{sen} u],$$

que no tiene puntos singulares, presenta uno debido a la parametrización. Con $-\pi/2 \leq u \leq \pi/2$ *y* $0 \leq v \leq 2\pi$*. Tenemos que para* $u = \pi/2$*, es decir en el punto* $(0,0,a)$ *la matriz Jacobiana*

$$J = \begin{pmatrix} -a\operatorname{sen} u\cos v & -a\cos u\operatorname{sen} v \\ -a\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v & a\cos u\cos v \\ a\cos u & 0 \end{pmatrix}$$

tiene rango 1. Con $\overline{x}(u,v) = [a\operatorname{sen} u, a\cos u\cos v, a\cos u\operatorname{sen} v]$*, como parametrización, el punto conflictivo pasaría a ser el* $(a,0,0)$*.*

El caso del cono[37] *circular con* $a =$ *cte., es bien distinto, obviamente si hay singularidad debida a la superficie en el vértice. Tenemos que*

$$\overline{x}(u,v) = [au\cos v, au\operatorname{sen} v, u],$$

con $u \in \mathbb{R}$ *y* $0 \leq v < 2\pi$*. En este caso*

$$J = \begin{pmatrix} a\cos v & -au\operatorname{sen} v \\ a\operatorname{sen} v & au\cos v \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

para $u = 0$ *tenemos el punto singular* $(0,0,0)$*, ya que la segunda columna se anula. A veces se distinguen ambos casos y se habla de singularidad* paramétrica *y de singularidad* esencial*.*

Definición 2.2. *Sea un punto* $P(u,v)$*, dada la superficie* $\overline{x}(u,v) = [x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v)]$*, consideremos los vectores*

$$\begin{aligned} \overline{x}'_u &= [\frac{\partial x_1}{\partial u}, \frac{\partial x_2}{\partial u}, \frac{\partial x_3}{\partial u}], \\ \overline{x}'_v &= [\frac{\partial x_1}{\partial v}, \frac{\partial x_2}{\partial v}, \frac{\partial x_3}{\partial v}]. \end{aligned}$$

La condición de que $\operatorname{ran}(J) = 2$ *en ese punto, puede interpretarse*[38] *ahora como*

$$\overline{x}'_u \times \overline{x}'_v \neq 0.$$

Es decir, los vectores $\overline{x}'_u$ *y* $\overline{x}'_v$ *además de no anularse en el punto* $P(u,v)$*, tienen direcciones distintas. En general no tienen porqué ser ortogonales ni tampoco unitarios.*

Dichos vectores son las tangentes en P *a las curvas que resultan de hacer alternativamente* $u =$ *cte. y* $v =$ *cte'. en* $\overline{x}(u,v) = [x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v)]$*. A dichas curvas se las conoce como curvas paramétricas o curvas coordenadas. Obviamente cualquier punto* P *sobre la superficie queda definido conociendo el par* (u,v)*, que se denominarán coordenadas curvilíneas de* P*.*

---

[36] De ecuación implícita $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

[37] De ecuación implícita $x^2 + y^2 - a^2z^2 = 0$.

[38] El que $\operatorname{ran}(J) = 2$ no quiere decir que en ese punto exista plano tangente. Recordemos que la existencia de las parciales no garantiza la diferenciabilidad, por ejemplo $\overline{x}(u,v) = [u, v, \sqrt{|uv|}]$, en $u = v = 0$, se cumple $\operatorname{ran}(J)(0,0) = 2$, sin embargo no hay plano tangente. Una condición suficiente para la existencia del plano tangente es la continuidad de las parciales en un entorno del punto de que se trate.

2.2 Normal y plano tangente. Triedro móvil sobre una superficie.

Observación 2.6. *Es conocido de los cursos anteriores de cálculo que si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, y $A \subset \mathbb{R}^n$ y $f \in C^1(A)$, (es decir es de clase uno, o lo que es lo mismo, tiene derivadas parciales primeras continuas en A), entonces f diferenciable en todo $a \in A$. También se probó que el que sea diferenciable en un punto es equivalente a que exista plano tangente en dicho punto. En particular cuando $n = 2$, la función es $z = f(x,y)$ y las derivadas parciales son continuas, entonces existe el plano tangente en (a,b) a la superficie $z = f(x,y)$, y viene dado por*

$$\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-f(a,b) \\ 1 & 0 & f'_x(a,b) \\ 0 & 1 & f'_y(a,b) \end{vmatrix} = 0,$$

de donde

$$f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b) = z - f(a,b).$$

Proposición 2.1. *Sea una superficie $\overline{x}(u,v) = [x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v)]$, al menos de clase uno; entonces la ecuación del plano tangente en un punto regular $\overline{x}(u_0,v_0)$ de la superficie viene dado*[39] *por*

$$\begin{vmatrix} x - x_1(u_0,v_0) & y - x_2(u_0,v_0) & z - x_3(u_0,v_0) \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u}(u_0,v_0) & \dfrac{\partial x_2}{\partial u}(u_0,v_0) & \dfrac{\partial x_3}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v}(u_0,v_0) & \dfrac{\partial x_2}{\partial v}(u_0,v_0) & \dfrac{\partial x_3}{\partial v}(u_0,v_0). \end{vmatrix} = 0. \tag{30}$$

Dem. Si el punto (x,y,z) pertenece al plano tangente a la superficie en el punto $\overline{x}(u_0,v_0)$, el vector $[x - x_1(u_0,v_0)]\overline{e}_1 + [y - x_2(u_0,v_0)]\overline{e}_2 + [z - x_3(u_0,v_0)]\overline{e}_3$ está contenido en el plano tangente. Asimismo lo están los vectores $\overline{x}'_u$ y $\overline{x}'_v$, de donde el producto vectorial $\overline{x}'_u \times \overline{x}'_v$ es normal a dicho plano y en consecuencia

$$\langle [(x - x_1(u_0,v_0))\overline{e}_1 + (y - x_2(u_0,v_0))\overline{e}_2 + (z - x_3(u_0,v_0))\overline{e}_3] \ , \ \overline{x}'_u \times \overline{x}'_v \rangle = 0. \tag{31}$$

Como sabemos que

$$\overline{x}'_u \times \overline{x}'_v = \begin{vmatrix} \overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \overline{e}_3 \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} & \dfrac{\partial x_2}{\partial v} & \dfrac{\partial x_3}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Efectuando el producto escalar (31) como producto mixto resulta (30).

□

[39] En general es más útil la ecuación paramétrica $\overline{y}(p,q) = [x_0 + p\, a_1 + q\, b_1, y_0 + p\, a_2 + q\, b_2, z_0 + p\, a_3 + q\, b_3]$ donde $\overline{x}'_u = [a_1,a_2,a_3]$ y $\overline{x}'_v = [b_1,b_2,b_3]$, derivados en u_0, v_0, siendo $[x_0,y_0,z_0] = \overline{x}(u_0,v_0)$. Para dibujar el plano tangente suele ser incluso más práctico tomar $[a_1,a_2,a_3] = \overline{e}_1$ y $[b_1,b_2,b_3] = \overline{e}_2$, ortonormalización de $\{\overline{x}'_u, \overline{x}'_u\}$, para mantener la proporcionalidad y la ortogonalidad de los márgenes del plano.

Corolario 2.1. *Sea* $z = f(x,y)$*,* $f \in C^1(A)$*,* $A \subset \mathbb{R}^2$ *y* $(a,b) \in A$*, entonces el plano tangente en* (a,b) *a* f *viene dado por*

$$\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-f(a,b) \\ 1 & 0 & f'_x(a,b) \\ 0 & 1 & f'_y(a,b) \end{vmatrix} = 0.$$

Dem. El caso cartesiano no es más que una parametrización particular de lo visto en la proposición anterior. El vector de posición sobre la superficie es

$$\overline{x}(x,y) = [x, y, f(x,y)],$$

calculando las derivadas parciales resulta de inmediato. $\square$

Corolario 2.2. *El vector unitario normal a la superficie en el punto* $\overline{x}(u_0, v_0)$*, vendrá dado por*

$$\overline{N} = \frac{\overline{x}'_u \times \overline{x}'_v}{|\overline{x}'_u \times \overline{x}'_v|}.$$

Las anteriores derivadas se calculan en (u_0, v_0)*.*

Definición 2.3. *Dada una superficie* $\overline{x}(u,v)$*, a la base* $\{\overline{x}'_u, \overline{x}'_v, \overline{N}\}$*, calculada en* (u_0, v_0) *se la denomina triedro móvil en el punto* (u_0, v_0)*.*

Proposición 2.2. *Si llamamos*

$$E = \langle \overline{x}'_u\ ,\ \overline{x}'_u \rangle, \quad F = \langle \overline{x}'_u\ ,\ \overline{x}'_v \rangle, \quad G = \langle \overline{x}'_v\ ,\ \overline{x}'_v \rangle.$$

Entonces

$$|\overline{x}'_u \times \overline{x}'_v|^2 = EG - F^2.$$

Dem. Tenemos[40] que

$$\begin{aligned} |\overline{x}'_u \times \overline{x}'_v|^2 &= \langle \overline{x}'_u \times \overline{x}'_v\ ,\ \overline{x}'_u \times \overline{x}'_v \rangle \\ &= \langle \overline{x}'_u\ ,\ \overline{x}'_u \rangle \langle \overline{x}'_v\ ,\ \overline{x}'_v \rangle - \langle \overline{x}'_u\ ,\ \overline{x}'_v \rangle^2 \\ &= EG - F^2. \end{aligned}$$

Corolario 2.3. *El vector normal a la superficie viene dado por*

$$\overline{N} = \frac{\begin{vmatrix} \overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \overline{e}_3 \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} & \dfrac{\partial x_2}{\partial v} & \dfrac{\partial x_3}{\partial v} \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}. \tag{32}$$

[40] Sabemos que $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, de donde $\frac{|\overline{u} \times \overline{v}|^2}{|\overline{u}|^2 |\overline{v}|^2} + \frac{\langle \overline{u}, \overline{v} \rangle^2}{|\overline{u}|^2 |\overline{v}|^2} = 1$, luego $|\overline{u} \times \overline{v}|^2 = |\overline{u}|^2 |\overline{v}|^2 - \langle \overline{u}, \overline{v} \rangle^2$, es decir $\langle \overline{u} \times \overline{v}, \overline{u} \times \overline{v} \rangle = \langle \overline{u}, \overline{u} \rangle \langle \overline{v}, \overline{v} \rangle - \langle \overline{u}, \overline{v} \rangle^2$.

Observación 2.7. *Hubiéramos podido llegar al resultado*

$$|\overline{x}'_u \times \overline{x}'_v|^2 = EG - F^2$$

utilizando un camino diferente[41].

Observación 2.8. *En cartesianas el plano tangente es*

$$f'_x(a,b)(x-a) + f'_y(a,b)(y-b) = z - f(a,b).$$

Expresado como $Ax+By+Cz+D=0$*, es claro que* $A = f'_x(a,b)$*,* $B = f'_y(a,b)$ *y* $C=-1$*. De donde el vector normal al plano tangente, que como sabemos es* $A\ \overline{e}_1 + B\ \overline{e}_2 + C\ \overline{e}_3$*, normalizado resultará*

$$\overline{N} = \frac{f'_x(a,b)\overline{e}_1 + f'_y(a,b)\overline{e}_2 - \overline{e}_3}{\sqrt{[f'_x(a,b)]^2 + [f'_y(a,b)]^2 + 1}}.$$

El vector normal al plano tangente en el punto $(a,b,f(a,b))$ *forma con los ejes coordenados*

---

[41] Tendríamos:

$$\begin{aligned}
|\overline{x}'_u \times \overline{x}'_v|^2 &= \left(\frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial x_3}{\partial v} - \frac{\partial x_3}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} - \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_3}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial v} - \frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\partial x_2}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial x_3}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial x_2}{\partial v}\right)^2 - 2\frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial x_3}{\partial v}\frac{\partial x_3}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial v} \\
&\quad + \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial x_3}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2 - 2\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_3}{\partial v}\frac{\partial x_3}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} \\
&\quad + \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial x_2}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2 - 2\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial v}\frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}.
\end{aligned}$$

Hemos llamado

$$\begin{aligned}
E &= \overline{x}'_u \cdot \overline{x}'_u = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u}\right)^2 \\
G &= \overline{x}'_v \cdot \overline{x}'_v = \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial v}\right)^2 \\
F &= \overline{x}'_u \cdot \overline{x}'_v = \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial v} + \frac{\partial x_3}{\partial u}\frac{\partial x_3}{\partial v},
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
F^2 &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial u}\frac{\partial x_3}{\partial v}\right)^2 \\
&\quad + 2\frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial x_3}{\partial v}\frac{\partial x_3}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial v} + 2\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_3}{\partial v}\frac{\partial x_3}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} + 2\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial v}\frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}.
\end{aligned}$$

De donde resulta inmediato que

$$|\overline{x}'_u \times \overline{x}'_v|^2 = EG - F^2.$$

OX, OY, OZ, respectivamente[42] *los ángulos α, β, γ. Es claro que*

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{f'_x(a,b)}{\sqrt{[f'_x(a,b)]^2 + [f'_y(a,b)]^2 + 1}} \\
\cos\beta &= \frac{f'_y(a,b)}{\sqrt{[f'_x(a,b)]^2 + [f'_y(a,b)]^2 + 1}} \\
\cos\gamma &= \frac{-1}{\sqrt{[f'_x(a,b)]^2 + [f'_y(a,b)]^2 + 1}}.
\end{aligned}$$

El vector normal se puede considerar en sentido positivo o negativo respecto de la superficie, se suele[43] *considerar orientado hacia donde la superficie es convexa. Cuando se estudian elementos de área se toma siempre un ángulo $-\pi/2 < \gamma \leq \pi/2$, de modo que la componente sea positiva.*

$\square$

2.3 Una aplicación: movimiento de superficies sobre superficies

Observación 2.9. *A veces es necesario ortonormalizar los vectores $\{\overline{x}'_u, \overline{x}'_v, \overline{N}\}$, ya que los vectores $\overline{x}'_u$ y $\overline{x}'_v$, en general ni son ortogonales ni están normalizados. Resulta obvio que a partir de $\overline{x}'_u(u_0, v_0)$ y $\overline{x}'_v(u_0, v_0)$, obtenemos:*

$$\begin{aligned}
\overline{e}_1 &= \frac{\overline{x}'_u}{\sqrt{\langle \overline{x}'_u, \overline{x}'_u \rangle}}, & \overline{w} &= \overline{x}'_v - \langle \overline{x}'_v, \overline{e}_1 \rangle \overline{e}_1, \\
\overline{e}_2 &= \frac{\overline{w}}{\sqrt{\langle \overline{w}, \overline{w} \rangle}}, & \overline{N} &= \overline{e}_1 \times \overline{e}_2.
\end{aligned}$$

Es claro que el sistema $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{N}\}$ es ortonormal[44]

Observación 2.10. *Una aplicación importante del triedro móvil $\{\overline{x}'_u, \overline{x}'_v, \overline{N}\}$, (o del móvil ortonormalizado $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{N}\}$), en la descripción analítica que permite la construcción o el movimiento (giro, deslizamiento o rodadura) de unas superficies sobre otras. Ya hemos visto los ejemplos de las páginas 7 y 17, ahora puede hacerse otro tanto sobre superficies.*

Por ejemplo si queremos construir un cono $\overline{x}(t, w) = [w \operatorname{sen}(t), w\cos(t), wa]$, de modo que su vértice esté sobre una esfera $\overline{y}(u, v) = [\cos u, \operatorname{sen} u \cos v, \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v]$, en el punto (u_0, v_0), y cuyo eje sea normal a dicha esfera, sus ecuaciones serán

$$\overline{z}(t, w) = \overline{y}(u_0, v_0) + [w \operatorname{sen}(t), w\cos(t), wa] \begin{pmatrix} \overline{e}_1(u_0, v_0) \\ \overline{e}_2(u_0, v_0) \\ \overline{N}(u_0, v_0) \end{pmatrix}.$$

[42]El vector unitario en la dirección normal al plano tangente viene dado por $\overline{u} = \cos\alpha\, \overline{e}_1 + \cos\beta\, \overline{e}_2 + \cos\gamma\, \overline{e}_3$, tendremos que $u \cdot u = |u| \cos 0 = 1$, de donde resulta el conocido resultado $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ para los cosenos directores de un cierto vector.

[43]Es obvio que si en una parametrización permutamos u con v, entonces $\overline{N}$ cambia de sentido.

[44]Más sencillo en este caso tridimensional que aplicar Gram-Schmdit, es obtener $\overline{N}$, $\overline{e}_1$ y tomar luego $\overline{e}_2 = \overline{N} \times \overline{e}_1$. Lo que ocurre es que en general $\overline{e}_2$ no tiene porqué ser tangente a las líneas paramétricas.

donde a es el parámetro que regula el ángulo[45] *del cono.*

Para mover ahora dicho cono sobre la esfera (por ejemplo siguiendo un paralelo), es suficiente con variar el punto genérico (u_0, v_0) *sobre la esfera. Haciendo* $v_0 = \pi/6$ *y variando* $u_0 \in [0, 2\pi]$*, recorreríamos el paralelo* $v_0 = \pi/6$.

Si se plantea el problema de girar $\overline{x}(t, w)$*, superficie situada sobre* $\overline{y}(u, v)$*, en torno a alguno de los elementos del triedro* $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{N}\}$*, de esta última, en un cierto punto* (u_0, v_0)*, por ejemplo en torno a* $\overline{N}$*, basta con considerar*

$$\overline{z}(t, w, \theta) = \overline{y}(u_0, v_0) + [x_1(t, w), x_2(t, w), x_3(t, w)] \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{e}_1(u_0, v_0) \\ \overline{e}_2(u_0, v_0) \\ \overline{N}(u_0, v_0) \end{pmatrix},$$

variando θ *giraremos la citada superficie.*

Esta técnica es aplicable igualmente si se trata de situar superficies sobre curvas alabeadas, solo que entonces hay que cambiar en la anterior expresión las componentes del triedro móvil normalizado por las componentes del triedro de Frenet. Por ejemplo si queremos deslizar un cilindro $\overline{x}(u, v) = [u, \frac{1}{5}\cos(v), \frac{1}{5}\operatorname{sen}(v)]$ *de radio* $1/5$ *y altura* $1/3$ *de modo que su eje coincida con la tangente a la curva* $\overline{y}(t) = [\operatorname{sen}(t), \operatorname{sen}(t)\cos(t), \cos(3t)]$*, tendríamos*

$$\overline{z}(u, v, t) = \overline{y}(t) + [u, \frac{1}{5}\cos(v), \frac{1}{5}\operatorname{sen}(v)] \begin{pmatrix} \overline{t}(t) \\ \overline{n}(t) \\ \overline{b}(t) \end{pmatrix},$$

obviamente $v \in [0, 2\pi]$*,* $u \in [0, 1/3]$*. Los elementos del triedro* $\{\overline{t}(t), \overline{n}(t), \overline{b}(t)\}$*, se refieren, claro está, a la curva alabeada* $\overline{y}(t)$*. Escogiendo* $t \in [0, 2\pi]$ *la tendremos en distintas posiciones*[46] *de la curva.*

Ejercicio 2.1. Sea $\overline{x}(u, v) = [6\operatorname{sen}(u), 6\cos(u) + 2v\cos(u/2), 2v\operatorname{sen}(u/2)]$ con $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [-1, 1]$. Superficie de una sola cara conocida como banda de Moebius. Se pide:

i) Obtener las ecuaciones de una esfera de radio unidad, tangente a la curva $v = 0$ contenida en dicha superficie, y cuya posición sobre ella dependa de un parámetro t, de modo que al variarlo la esfera se deslice sobre dicha superficie.

ii) Modificar las instrucciones para que al variar t ruede en vez de deslizarse.

2.4 Elemento de área sobre la superficie

Observación 2.11. *Es bien sabido que el área de un paralelogramo de lados* $\overline{u}$ *y* $\overline{v}$ *viene dada por*

$$|\overline{u} \times \overline{v}| = |\overline{u}|\ |\overline{v}|\ \operatorname{sen}\theta, \quad \theta = \widehat{\overline{u}, \overline{v}}.$$

[45] Obviamente para obtener un disco tangente en (u_0, v_0) de radio r, con $w \in [0, r]$, basta con hacer $a = 0$ en la anterior ecuación.

[46] Nótese que la utilización de este método solo es precisa si exigimos orientación de una sobre otra, para el simple posicionamiento no sería necesario utilizar el triedro de Frenet. Por ejemplo para situar una esfera (sin preocuparnos de la posición de meridianos y paralelos) bastaría con colocar su centro en las diferentes puntos de la curva base, otra cosa sería si supuestamente representadas las curvas coordenadas deseamos que los polos se mantengan en todas las posibles posiciones sobre la curva.

Proposición 2.3. *Sea una superficie regular* $\overline{x} = [x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v)]$*, el elemento de área en un punto* (u,v) *sobre la superficie viene dado por*

$$dA = \sqrt{EG - F^2}\; dudv.$$

Dem. Si partimos de

$$\overline{x}(u,v) = [x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v)],$$

a lo largo de una curva paramétrica $u =$ cte. tendremos

$$\Delta\overline{x}|_{u=\text{cte.}} = \overline{x}'_v\; \Delta v,$$

análogamente a lo largo de $v = \text{cte}'$. obtenemos

$$\Delta\overline{x}|_{v=\text{cte}'.} = \overline{x}'_u\; \Delta u.$$

De donde resulta inmediato que el área paralelogramo elemental formado por las tangentes, en el punto P de la superficie, y tomando sobre ellas las longitudes du y dv respectivamente según las direcciones de las curvas paramétricas $v =$ cte. y $u = \text{cte}'$., vendrá dada por

$$dA = |\overline{x}'_v dv \;\times\; \overline{x}'_u du| = |\overline{x}'_u \times \overline{x}'_v|\; dudv = \sqrt{EG - F^2}\; dudv.$$

$\square$

Ejemplo 2.2. *Calculemos el área del toro, utilizando para ello la parametrización*

$$\overline{x}(u,v) = [(a + r\cos u)\cos v, (a + r\cos u)\operatorname{sen} v, r\operatorname{sen} u], \quad 0 < u < 2\pi, \quad 0 < v < 2\pi,$$

esta parametrización recubre el toro, excepto un meridiano y un paralelo. Tenemos que

$$\begin{aligned} \overline{x}'_u &= [-r\operatorname{sen} u\cos v, -r\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v, r\cos u] \\ \overline{x}'_v &= [-(a + r\cos u)\operatorname{sen} v, (a + r\cos u)\cos v, 0] \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} E &= r^2\operatorname{sen}^2 u\cos^2 v + r^2\operatorname{sen}^2 u\operatorname{sen}^2 v + r^2\cos^2 u = r^2. \\ F &= 0 \\ G &= (r\cos u + a)^2. \end{aligned}$$

Luego

$$\sqrt{EG - F^2} = r(r\cos u + a).$$

Aplicando la fórmula anterior el área resulta ser

$$A_\epsilon = \int_{0+\epsilon}^{2\pi-\epsilon} (r^2\cos u + ra)du \int_{0+\epsilon}^{2\pi-\epsilon} dv = r^2(2\pi - 2\epsilon)(\operatorname{sen}(2\pi - \epsilon) - \operatorname{sen}\epsilon) + ra(2\pi - 2\epsilon)^2,$$

y haciendo $\epsilon \to 0$ *obtenemos finalmente*

$$A = 4\pi^2 ra.$$

Observación 2.12. *En coordenadas cartesianas tendremos*

$$dA\;\cos\gamma = dxdy \quad \Longrightarrow \quad dA = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \left[\;\sqrt{[f'_x(a,b)]^2 + [f'_y(a,b)]^2 + 1}\;\right]\; dxdy.$$

El área de una región acotada R *sobre la superficie* $z = f(x,y)$ *es*

$$A = \iint_\Omega \sqrt{[f'_x(a,b)]^2 + [f'_y(a,b)]^2 + 1}\;\; dxdy,$$

donde Ω *es la proyección ortogonal de* R *sobre el plano* xy*.*

2.5 Elemento de línea. Primera Forma cuadrática fundamental.

Observación 2.13. *Recordemos que dado un paralelogramo de lados $\overline{u}$ y $\overline{v}$, la longitud de los cuadrados de las diagonales viene dada por*

$$\begin{aligned}|\overline{u}+\overline{v}|^2 &= \langle \overline{u}+\overline{v}, \overline{u}+\overline{v}\rangle = \langle \overline{u},\overline{u}\rangle + \langle \overline{v},\overline{v}\rangle + 2\langle \overline{u},\overline{v}\rangle \\ |\overline{u}-\overline{v}|^2 &= \langle \overline{u}-\overline{v}, \overline{u}-\overline{v}\rangle = \langle \overline{u},\overline{u}\rangle + \langle \overline{v},\overline{v}\rangle - 2\langle \overline{u},\overline{v}\rangle .\end{aligned}$$

Proposición 2.4. *Dada la superficie regular $\overline{x}(u,v) = [x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v)]$, el elemento de longitud viene dado por*

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2. \tag{33}$$

Dem. Partimos de que en la dirección de las curvas paramétricas

$$\begin{aligned}\Delta\overline{x}|_{u=\text{cte.}} &= \overline{x}'_v\Delta v \\ \Delta\overline{x}|_{v=\text{cte}'.} &= \overline{x}'_u\Delta u.\end{aligned}$$

De donde la longitud al cuadrado de la diagonal del paralelogramo que tiene por lados $\overline{x}'_v dv$ y $\overline{x}'_u du$, vendrá dada por

$$\begin{aligned}ds^2 &= |\overline{x}'_u du + \overline{x}'_v dv|^2 = \langle \overline{x}'_v dv + \overline{x}'_u du, \overline{x}'_v dv + \overline{x}'_u du\rangle \\ &= \langle \overline{x}'_u, \overline{x}'_u\rangle du^2 + \langle \overline{x}'_v, \overline{x}'_v\rangle dv^2 + 2\langle \overline{x}'_u, \overline{x}'_v\rangle dudv \\ &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.\end{aligned}$$

□

Definición 2.4. *ds^2 puede expresarse también como*

$$ds^2 = (du, dv)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv\end{pmatrix} = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

De ahí que se denomine a la ecuación (33) primera forma cuadrática fundamental de una superficie, y se conozca a los coeficientes E, F y G como coeficientes de la primera forma. En ocasiones se indica como $ds^2 = \mathrm{I}(du, dv)$ o simplemente como I.

Observación 2.14. *¿Cómo se utiliza el anterior elemento de línea? Muy sencillo, dada una curva sobre la superficie en la forma $\varphi(u,v) = 0$, tenemos que du y dv están ligadas por la relación $\varphi'_u du + \varphi'_v dv = 0$. De donde $dv = -\varphi'_u/\varphi'_v\, du$, y podemos substituir en la expresión (33). Otra posibilidad es dar la ecuación de la curva sobre la superficie mediante el par de relaciones $u = u(t)$ y $v = v(t)$, y llegamos trivialmente a*

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E[u'(t)]^2 + 2F[u'(t)\; v'(t)] + G[v'(t)]^2}\, dt.$$

Notemos que en la anterior expresión E, F y G son en general funciones de t, a través de las relaciones $u = u(t)$ y $v = v(t)$. Si partiésemos de una curva dada en la forma $v = h(u)$, bastaría con considerar $u = u$, es decir $v' = h'(u)$ y $u' = 1$, e integrar respecto de u.

2.6 Propiedades de la Primera Forma

Proposición 2.5. *La primera forma cuadrática fundamental es una forma cuadrática definida positiva.*

DEM. Como exigimos que $\mathrm{ran}(J) = 2$ tenemos que $\overline{x}'_u \neq \overline{0}$ y $\overline{x}'_v \neq \overline{0}$, por tanto

$$E = \langle \overline{x}'_u, \overline{x}'_u \rangle = |\overline{x}'_u|^2 > 0,$$

y por otro lado como $\overline{x}'_u \times \overline{x}'_v \neq 0$, resulta que

$$EG - F^2 = |\overline{x}'_u \times \overline{x}'_v|^2 > 0,$$

y aplicando el criterio de Sylvester la forma cuadrática anterior es definida positiva. $\square$

Proposición 2.6. *Sea S la superficie de ecuación $\overline{x}(u,v)$, $u,v \in D$ y consideremos el cambio de variables dado por $\overline{g} : D^* \to D$ tal que $\overline{g}(t,w) = [u(t,w), v(t,w)]$, siendo $\overline{g} \in C^1(D^*)$ y biyectiva; entonces*[47] *se verifica que:*

i) ds^2 *es invariante.*

ii) $\widehat{E}\widehat{G} - \widehat{F}^2 = (EG - F^2)\left|\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(t,w)}\right|^2.$

DEM. Recordemos que

$$du = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial w}dw, \quad dv = \frac{\partial v}{\partial t}dt + \frac{\partial v}{\partial w}dw,$$

y también se cumple

$$\begin{aligned} \overline{x}'_t &= \overline{x}'_u \frac{\partial u}{\partial t} + \overline{x}'_v \frac{\partial v}{\partial t} \\ \overline{x}'_w &= \overline{x}'_u \frac{\partial u}{\partial w} + \overline{x}'_v \frac{\partial v}{\partial w}. \end{aligned}$$

i) Como $ds^2 = |\overline{x}'_t dt + \overline{x}'_w dw|^2 = \left|\dfrac{\partial \overline{x}}{\partial t}dt + \dfrac{\partial \overline{x}}{\partial w}dw\right|^2$, derivando por intermedio de las variables u y v tendremos

$$\begin{aligned} \widehat{E}dt^2 + 2\widehat{F}dtdw + \widehat{G}dw^2 &= \left|\frac{\partial \overline{x}}{\partial t}dt + \frac{\partial \overline{x}}{\partial w}dw\right|^2 \\ &= \left|\left(\frac{\partial \overline{x}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \overline{x}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\right)dt + \left(\frac{\partial \overline{x}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial w} + \frac{\partial \overline{x}}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial w}\right)dw\right|^2 \\ &= \left|\frac{\partial \overline{x}}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial w}dw\right) + \frac{\partial \overline{x}}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial t}dt + \frac{\partial v}{\partial w}dw\right)\right|^2 \\ &= \left|\frac{\partial \overline{x}}{\partial u}du + \frac{\partial \overline{x}}{\partial v}dv\right|^2 \\ &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2. \end{aligned}$$

[47] Obsérvese que podríamos deducir el resultado del teorema del cambio de variable para integrales dobles, puesto que $A = \iint_D \sqrt{EG - F^2}dudv = \iint_{D^*} \sqrt{\widehat{E}\widehat{G} - \widehat{F}^2}\,|\overline{g}'|\,dtdw$, donde $\overline{g} = (u(t,w), v(t,w))$, siendo $|\overline{g}'|$, el determinante Jacobiano de la trasformación $\overline{g}$, además $\widehat{E}(t,w) = E \circ \overline{g}$, etc,...

ii) Formando el producto $\overline{x}'_t \times \overline{x}'_w$, tendremos que

$$\begin{aligned}
\overline{x}'_t \times \overline{x}'_w &= (\overline{x}'_u \times \overline{x}'_v)\left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial w}\right] + (\overline{x}'_v \times \overline{x}'_u)\left[\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial w}\right] \\
&= (\overline{x}'_u \times \overline{x}'_v)\left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial w} - \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial w}\right] \\
&= (\overline{x}'_u \times \overline{x}'_v)\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} & \frac{\partial u}{\partial w} \\ \frac{\partial v}{\partial t} & \frac{\partial v}{\partial w} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Tomando módulos y elevando al cuadrado tenemos finalmente[48]

$$\widehat{E}\widehat{G} - \widehat{F}^2 = (EG - F^2)\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(t,w)}\right|^2.$$

□

Corolario 2.4. *El ángulo θ que forman las curvas paramétricas en un punto dado (u, v) de la superficie verifica*

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{F}{\sqrt{EG}}, \\
\operatorname{sen}\theta &= \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}.
\end{aligned}$$

Dem. Tenemos que

$$\begin{aligned}
|\overline{x}'_u| &= \sqrt{\langle \overline{x}'_u, \overline{x}'_u\rangle} = \sqrt{E}, \\
|\overline{x}'_v| &= \sqrt{\langle \overline{x}'_v, \overline{x}'_v\rangle} = \sqrt{G}.
\end{aligned}$$

De donde resulta inmediato que

$$\cos\theta = \frac{\langle \overline{x}'_u, \overline{x}'_v\rangle}{|\overline{x}'_u|\,|\overline{x}'_v|} = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Por otro lado

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{|\overline{x}'_u \times \overline{x}'_v|}{|\overline{x}'_u|\,|\overline{x}'_v|} = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}.$$

□

Corolario 2.5. *Las curvas paramétricas son ortogonales si y solo si $F = 0$.*

Ejemplo 2.3. *Consideremos el cilindro, el cono y la esfera:*

i) Para el cilindro $\overline{x}(u, v) = [a \operatorname{sen} v, b \cos v, cu]$, tenemos: $E = c^2$, $F = 0$, $G = a^2\cos^2 v + b^2 \operatorname{sen}^2 v$. Luego las curvas paramétricas son siempre ortogonales[49].

[48] O utilizando el teorema de la función inversa $(EG - F^2) = (\widehat{E}\widehat{G} - \widehat{F}^2)\left|\frac{\partial(t,w)}{\partial(u,v)}\right|^2$, más en consonancia con la expresión integral. Nótese que para ambas expresiones, si deseáramos integrar, tendríamos que utilizar $\overline{g}$ o, respectivamente, su inversa al particularizar el Jacobiano.

[49] Nótese que si $a \neq b$ la superficie no es de revolución. Es por tanto falso que si $F = 0$ estemos ante una superficie de revolución.

ii) *Para el cono* $\overline{x}(u,v) = [au \operatorname{sen} v, bu\cos v, cu]$*, resultan* $E = a^2 \operatorname{sen}^2 v + b^2\cos^2 v + c^2$, $F = (a^2 - b^2)u \operatorname{sen} v \cos v$ *y* $G = u^2(a^2\cos^2 v + b^2 \operatorname{sen}^2 v)$*. Observamos que las curvas paramétricas no son ortogonales en el caso general. Solo si* $a = b$*, es decir, si el cono es circular, y por tanto de revolución, entonces* $F = 0$ *y si lo son.*

iii) *Finalmente para el elipsoide de revolución* $\overline{x}(u,v) = [a\sin u, b\cos u \operatorname{sen} v, b\cos u\cos v]$*, obtenemos* $F = (b^2 - b^2)\operatorname{sen} u\cos u \operatorname{sen} v\cos v = 0$*; luego las curvas paramétricas son, como cabía esperar, ortogonales*[50] *, en particular para la esfera* $a = b$

2.7 Ángulo de dos curvas. Sistema ortogonal de curvas

Observación 2.15. *Dada una superficie* $\overline{x}(u,v)$*. Una curva sobre dicha superficie viene dada por una relación entre los parámetros* u *y* v*. Esta relación puede tomar las siguientes formas:*

i) *Ecuación implícita:* $f(u,v) = 0$*, con* $|f'_u| + |f'_v| \neq 0$*.*

ii) *Explícita:* $v = g(u)$ *o* $u = h(v)$*.*

iii) *Forma paramétrica:* $u = u(\lambda)$*,* $v = v(\lambda)$*.*

iv) *Forma diferencial:* $\dfrac{dv}{du} = f(u,v)$*. Esta expresión representa una familia de curvas debido a la constante de integración.*

v) *Forma cuadrática diferencial:*

$$A(u,v)du^2 + 2B(u,v)dudv + C(u,v)dv^2 = 0.$$

Si suponemos $C \neq 0$ *dividiendo por* du^2*, resolviendo la ecuación cuadrática y para valores tales que* $B^2 - AC > 0$*, resultan*

$$\frac{dv}{du} = f_1(u,v), \quad \frac{dv}{du} = f_2(u,v).$$

Que corresponden a dos familias de curvas.

Proposición 2.7. *Dadas dos direcciones*[51] $\dfrac{dv}{du}$ *y* $\dfrac{\delta v}{\delta u}$ *sobre un punto de la superficie, si*

[50] Para el elipsoide de tres ejes $\overline{x}(u,v) = [a\sin u, b\cos u \operatorname{sen} v, c\cos u\cos v]$, se tiene $F = (c^2 - b^2)\operatorname{sen} u\cos u \operatorname{sen} v\cos v$, que solo es cero si $b = c$, es decir si se trata de un elipsoide de revolución.

[51] Que un escalar, en vez de un vector, pueda interpretarse como una dirección resulta inmediato. Pensemos en la pendiente de una recta en el plano cartesiano y respecto de unos ejes previamente establecidos.

forman un ángulo α, entonces se cumple[52] *que*

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}} \\ &= E\frac{du}{ds}\frac{\delta u}{\delta s} + F\left(\frac{du}{ds}\frac{\delta v}{\delta s} + \frac{dv}{ds}\frac{\delta u}{\delta s}\right) + G\frac{dv}{ds}\frac{\delta v}{\delta s}.\end{aligned}$$

DEM. Es trivial ya que

$$\begin{aligned} d\overline{x} &= \overline{x}'_u du + \overline{x}'_v dv \\ \delta\overline{x} &= \overline{x}'_u \delta u + \overline{x}'_v \delta v.\end{aligned}$$

Se cumple que

$$\cos\alpha = \frac{\langle d\overline{x}, \delta\overline{x}\rangle}{|d\overline{x}|\,|\delta\overline{x}|} = \frac{\langle\overline{x}'_u, \overline{x}'_u\rangle du\delta u + \langle\overline{x}'_u, \overline{x}'_v\rangle(du\delta v + dv\delta u) + \langle\overline{x}'_v, \overline{x}'_v\rangle dv\delta v}{|d\overline{x}|\,|\delta\overline{x}|}.$$

Utilizando ahora las definiciones de E, F, G, ds y δs resulta de inmediato. □

Ejemplo 2.4. *Hallar el ángulo entre las curvas $v = u + 1$ y $v = 3 - u$ sobre la superficie*

$$\overline{x}(u, v) = [u\cos v, u\operatorname{sen} v, u^2].$$

Tenemos que el punto intersección es lógicamente $u + 1 = 3 - u$, i.e. $u = 1$, luego $P \equiv [\cos 2, \operatorname{sen} 2, 1]$. Por tanto los coeficientes de la primera forma que son

$$E = 1 + 4u^2, \qquad F = 0, \qquad G = 1.$$

Valdrán en dicho punto $E = 5$, $F = 0$ y $G = 1$. Por otro lado

$$\frac{dv}{du} = 1, \qquad \frac{\delta v}{\delta u} = -1.$$

Aplicando la fórmula tendremos, tras dividir por $du\,\delta u$ numerador y denominador

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}} \\ &= \frac{E + F(\frac{\delta v}{\delta u} + \frac{dv}{du}) + G\frac{dv}{du}\frac{\delta v}{\delta u}}{\sqrt{E + 2F\frac{dv}{du} + G(\frac{dv}{du})^2}\sqrt{E + 2F\frac{\delta v}{\delta u} + G(\frac{\delta v}{\delta u})^2}} \\ &= \frac{5 + 0 + 1\cdot 1\cdot(-1)}{\sqrt{5 + 0 + 1\cdot 1}\,\sqrt{5 + 0 + 1\cdot 1}} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

[52] A veces resulta útil dividir por $du\delta u$, supuesto que conocemos $v = h(u)$ y $v = g(u)$, tenemos entonces

$$\cos\alpha = \frac{E + F[h'(u) + g'(u)] + Gh'(u)g'(u)}{\sqrt{E + 2Fh'(u) + G[h'(u)]^2}\sqrt{E + 2Fg'(u) + G[g'(u)]^2}}.$$

Por ejemplo para obtener el ángulo que una curva $v = g(u)$, que pasa por (u, v), forma con la línea coordenada $v =$ cte. ($dv/du = h'(u) = 0$), es inmediato que

$$\cos\alpha = \frac{E + Fg'(u)}{\sqrt{E}\sqrt{E + 2Fg'(u) + Gg'(u)^2}} = \frac{E + F\lambda}{\sqrt{E}\sqrt{E + 2F\lambda + G\lambda^2}}.$$

Nótese por otro lado que si $u =$ cte. ($\delta v/\delta u = g'(u) = \infty$), y haciendo $\lambda \to \infty$ resulta $\cos\alpha = \frac{F}{\sqrt{EG}}$, y obtenemos el resultado del corolario 2.4 relativo al ángulo que forman las curvas coordenadas por una via distinta.

Corolario 2.6. *La condición de ortogonalidad de dos direcciones sobre la superficie viene dada por*

$$Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v = 0.$$

Definición 2.5. *Se dice que dos familias de curvas sobre la superficie forman una red ortogonal si en cada punto de corte se cortan con un ángulo de $\pi/2$.*

Proposición 2.8. *Dada una superficie regular, si dos familias de curvas sobre la superficie satisfacen la ecuación diferencial*

$$Adu^2 + 2Bdudv + Cdv^2 = 0,$$

donde A, B y C son funciones de u y v. La condición necesaria y suficiente para que formen una red ortogonal es que para todo punto se cumpla

$$EC - 2FB + GA = 0,$$

(donde E, F y G son los coeficientes de la primera forma).

Dem. Dividiendo por dv en la ecuación diferencial y llamando $\lambda = du/dv$, tenemos que

$$A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0. \tag{34}$$

Con soluciones λ_1 y λ_2, por lo que podremos expresar

$$du = \lambda_1 dv, \qquad \delta u = \lambda_2 \delta v.$$

Si las curvas se cortan ortogonalmente, entonces $\cos\alpha = 0$, por lo que

$$Edu\delta u + F(du\delta v + \delta u dv) + Gdv\delta v = 0,$$

que substituyendo resulta

$$E\lambda_1\lambda_2 dv\delta v + F(\lambda_1 dv\delta v + \lambda_2 dv\delta v) + Gdv\delta v = 0,$$

como $dv \neq 0$ y $\delta v \neq 0$, tenemos que

$$E\lambda_1\lambda_2 + F(\lambda_1 + \lambda_2) + G = 0.$$

Pero de (34) sabemos que $\lambda_1\lambda_2 = \dfrac{C}{A}$ y $\lambda_1 + \lambda_2 = -\dfrac{2B}{A}$, de donde

$$E\frac{C}{A} - F\frac{2B}{A} + G = 0,$$

de donde resulta la fórmula del enunciado.

Recíprocamente si se cumple

$$CE - 2BF + AG = 0,$$

dividiendo por A volvemos a la ecuación anterior. Utilizando los valores de λ_1 y λ_2, multiplicando por $dv\delta v$ y substituyendo $du = \lambda_1 dv$ y $\delta u = \lambda_2 \delta v$, llegamos a

$$Edu\delta u + F(du\delta v + \delta u dv) + Gdv\delta v = 0,$$

que equivale a que $\cos\alpha = 0$. $\square$

2.8 Algunos tipos de superficies

2.8.1 Superficies regladas

Definición 2.6. *Se denomina superficie reglada a una superficie engendrada por una recta (según la dirección del vector $\overline{w}(u)$) denominada generatriz, que se apoya en una curva $\overline{\alpha}(u)$ llamada directriz. Admiten la siguiente parametrización*

$$\overline{x}(u,v) = \overline{\alpha}(u) + v\,\overline{w}(u),$$

donde $\overline{\alpha}(u)$ y $\overline{w}(u)$ son respectivamente una curva alabeada y un vector, como hemos señalado a la curva $\overline{\alpha}(u)$ se la denomina curva directriz o curva base, mientras que para un u fijo, $\overline{z}(v) = v\overline{w}(u) + \overline{\alpha}(u)$ define la recta generatriz.

Ejemplo 2.5. *Los ejemplos más simples de superficies regladas son el cilindro*[53] *(circular $a = b$ o elíptico $a \neq b$) y el cono (de vértice $[a, b, c]$), de ecuaciones respectivamente*

$$\begin{aligned} \overline{x}(u,v) &= [a \operatorname{sen} u, b\cos u, 0] + v\,[0,0,1], \\ \overline{x}(u,v) &= [a,b,c] + v\,[\operatorname{sen} u, \cos u, d]. \end{aligned}$$

Menos obvias son el hiperboloide de una hoja[54]

$$\overline{x}(u,v) = [a\cos u, b \operatorname{sen} u, 0] + v\,[-a\operatorname{sen} u, b\cos u, c].$$

La banda de Moebius[55] *tiene de ecuaciones*

$$\overline{x}(u,v) = [R\operatorname{sen}(u), R\cos(u), 0] + v\,[0, r\operatorname{sen}(u/2), r\cos(u/2)]\,.$$

El helicoide[56] *recto*

$$\overline{x}(u,v) = [0,0,bu] + v\,[r\cos u, r\operatorname{sen} u, 0],$$

o el paraboloide hiperbólico

$$\overline{x}(u,v) = [u,0,0] + v\,[0,1,u].$$

Otro ejemplo sencillo de superficie reglada es la denominada conoide recto. Esta superficie está engendrada por una recta que se mueve paralela a un plano apoyándose en una recta perpendicular a dicho plano guiada por una cierta curva $f(v)$, sus ecuaciones son

$$\overline{x}(u,v) = [0,0,f(u)] + v\,[\cos u, \operatorname{sen} u, 0].$$

[53] Se dice que una superficie es no cilíndrica si $\overline{w}'(t) \neq \overline{0}$, $\forall t \in I$. Es frecuente considerar $|\overline{w}(t)| = 1$.

[54] Obsérvese que se trata de una recta que pasa por dos puntos que recorren sendas circunferencias (o elipses), una en el plano $z = 0$ y otra en el $z = c$, desfasados $\pi/2$. Nótese que $[\cos(u+\pi/2), \operatorname{sen}(u+\pi/2)] = [-\operatorname{sen}(u), \cos(u)]$. Nótese que es una superficie de revolución no parametrizada como tal.

[55] Se construye a partir de una circunferencia de radio r situada siempre en un plano paralelo al plano OYZ, y cuyo centro se desplaza sobre una circunferencia de radio R, centrada en el origen, y en el plano $z = 0$. De manera que si el punto de apoyo se desplaza un ángulo u sobre la circunferencia de radio R, el radio r gira $u/2$ alrededor de su centro. Se toma como punto inicial el $(0, 1, 0)$ con el radio r vertical, los ángulos se miden todos en sentido positivo. Si tomamos $v \in [-1, 1]$ la banda tiene anchura $2r$.

[56] Unimos cada punto de la hélice $[\cos(u), \operatorname{sen}(u), bu]$ ortogonalmente con el eje del cilindro sustentador, evidentemente $v \geq 0$, de lo contrario se producen autointersecciones. Un ejemplo notable de dos helicoides rectos lo tenemos en las rampas de subida y bajada en el acceso a los museos Vaticanos, obra de Giuseppe Momo (1932).

Si $f(u) = n \operatorname{sen} u$, $n \in \mathbb{N}$, tenemos en particular el conoide generalizado (del caso $n = 2$) de Plucker. La arista cónica de Wallis es una superficie reglada su ecuación es

$$\overline{x}(a, b, c, u, v) = [v \cos(u), v \operatorname{sen}(u), c\sqrt{a^2 - b^2 \cos^2(u)}].$$

También son superficies regladas los cilindros generalizados, que se caracterizan porque $\overline{w}(u) = [a, b, c] = \overline{w}_0$, y los conos generalizados que se tienen cuando $\overline{\gamma}(u) = [a, b, c] = \overline{P}_0$ y $\overline{w}(u) = \overline{\gamma}(u) - \overline{P}_0$ de ecuaciones respectivamente

$$\begin{aligned} \overline{x}(u, v) &= \overline{\gamma}(u) + v\, \overline{w}_0 \\ \overline{x}(u, v) &= \overline{P}_0 + v\, (\overline{\gamma}(u) - \overline{P}_0), \end{aligned}$$

donde los casos más obvios aparecen cuando $\overline{\gamma}(u)$ es una curva plana y en consecuencia la base es una curva plana.

Observación 2.16. *Hay que ser cuidadosos, la silla del mono*[57] *puede escribirse*

$$\overline{x}(u, v) = [u, v, u^3 - 3v^2u] = [u, 0, u^3] + v\, [0, 1, -3vu],$$

sin embargo no es una superficie reglada ya que las componentes del vector que multiplica a v no son exclusivamente función de u. Tampoco resulta si tomamos u como parámetro de la generatriz. Si lo es, sin embargo, el paraguas de Whitney de ecuación $\overline{x}(u, v) = [uv, u, v^2]$, ya que

$$\overline{x}(u, v) = [uv, u, v^2] = [0, 0, v^2] + u\, [v, 1, 0].$$

Ejemplo 2.6. *Consideremos la curva $\overline{\alpha}(u) = [\operatorname{sen}(u), \operatorname{sen}(u)\cos(u), 1]$ y sea $[a, b, c] = [0, 0, 2]$, variando $u \in [0, 2\pi]$ y $v \in [-2, 2]$, resultan respectivamente un cilindro y un cono sobre*[58] *la "curva ocho". Análogamente si tomamos la espiral arquimediana $\overline{\alpha}(t) = [3t \cos(t), 3t \operatorname{sen}(t), 10]$, siendo $[a, b, c] = [1, 1, 1]$, con $t \in [0, 4\pi]$ y $v \in [0, 2]$, resultan un cilindro y un cono montados sobre una espiral.*

Definición 2.7. *Dada una superficie reglada no cilíndrica, llamaremos* punto central[59] *de la recta generatriz (para un u fijo) al punto en el que dicha generatriz corta*[60] *la perpendicular común a ella y a una generatriz "inmediatamente próxima". El lugar geométrico de los puntos centrales se denomina* línea de estricción *y lo notaremos como $\overline{\sigma}(u)$, en general es una curva alabeada.*

Proposición 2.9. *Sea la superficie reglada no cilíndrica $\overline{x}(s, v) = \overline{\alpha}(s) + v\, \overline{w}(s)$, con $\overline{w}(s)$ unitario, s su longitud de arco, entonces la línea de estricción viene dada por*

$$\overline{\sigma}(s) = \overline{\alpha}(s) - \langle \overline{\alpha}'(s), \overline{w}'(s) \rangle\, \overline{w}(s).$$

Para un parámetro arbitrario y dada la ecuación $\overline{x}(u, v) = \overline{\alpha}(u) + v\ \overline{w}(u)$, con $\overline{w}(u)$ unitario, la línea de estricción será

$$\overline{\sigma}(u) = \overline{\alpha}(u) - \frac{\langle \overline{\alpha}'(u), \overline{w}'(u) \rangle}{\langle \overline{w}'(u), \overline{w}'(u) \rangle}\, \overline{w}(u).$$

[57] La silla del mono se generaliza $\overline{x}(u, v) = [u, v, \Re([u + iv]^n)]$.

[58] ¡Ojo! En el caso del cono, la curva ocho "sobre" la que se encuentra no es la dada, sino obviamente la $[\sin(u) + a, \sin(u)\cos(u) + b, 1 + c]$

[59] La razón de llamarlo punto central consiste en que la curvatura gaussiana de la superficie es la misma si la calculamos en dos puntos equidistantes del punto central sobre la misma generatriz.

[60] Esta forma de introducirlo substituiría a la más intuitiva pero incorrecta que diría que el punto central es aquel en que se cortan dos generatrices infinitamente próximas, no es correcto pues dos generatrices infinitamente próximas, aun no siendo paralelas (caso cilíndrico), no tienen porqué cortarse.

Dem. Consideremos dos puntos $P \equiv \overline{\alpha}(s)$ y $Q \equiv P(s) + \Delta\overline{\alpha}(s)$, sobre la curva $\overline{\alpha}(s)$, y construyamos sobre cada uno de ellos la recta generatriz correspondiente. Los vectores unitarios según las direcciones de las generatrices serán $\overline{w}(s)$ y $\overline{w}(s + \Delta s) = \overline{w} + \Delta\overline{w}$.

Llamemos A y B respectivamente a los extremos del segmento perpendicular a ambas generatrices, es decir $A \equiv \overline{\alpha}(s) + v\overline{w}$, y $B \equiv \overline{\alpha}(s + \Delta s) + (v + \Delta v)(\overline{w} + \Delta\overline{w})$.

Sea $\overline{m}$ el vector unitario en la dirección $\overline{BA}$, y sea $A = B + \Delta q(s)\ \overline{m}$. Tendremos que en el cuadrilátero (no necesariamente plano) P, Q, B, A, vectorialmente se cumplirá $\overline{PQ} + \overline{QA} + \overline{AB} + \overline{BP} = 0$, es decir $\overline{PQ} + \overline{QA} + \overline{AB} = \overline{PB}$, luego

$$\overline{PB} = \overline{PQ} + \overline{QA} + \overline{AB} \quad \Rightarrow \quad v\,\overline{w} = \Delta\overline{\alpha} + (v + \Delta v)(\overline{w} + \Delta\overline{w}) + \Delta q\,\overline{m}. \tag{35}$$

Por construcción resulta que $\overline{m} \perp \overline{w}$, y $\overline{m} \perp (\overline{w} + \Delta\overline{w})$. Además $\langle \overline{w}, \overline{w}\rangle = 1$, derivando tenemos que $\langle \overline{w}', \overline{w}\rangle = 0$, es decir $\overline{w} \perp \overline{w}'$. Por otro lado es claro que $\overline{w} \times (\overline{w} + \Delta\overline{w}) = \overline{w} \times \Delta\overline{w} = c\,\overline{m}$, donde c es una constante. Hemos visto que $\langle \overline{w}, \overline{m}\rangle = 0$, y $\langle \overline{w} + \Delta\overline{w}, \overline{m}\rangle = 0$, en consecuencia de $\langle \overline{w}, \overline{m}\rangle + \langle \Delta\overline{w}, \overline{m}\rangle = 0$, y tenemos que $\langle \Delta\overline{w}, \overline{m}\rangle = 0$, por lo que $\left(\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\overline{w}}{\Delta s}\right) \perp \overline{m}$.

Dividiendo (35) por Δs, resultará tras reordenar, que

$$\frac{\Delta\overline{\alpha}}{\Delta s} + v\,\frac{(\overline{w} + \Delta\overline{w}) - \overline{w}}{\Delta s} + \frac{\Delta v}{\Delta s}(\overline{w} + \Delta\overline{w}) + \frac{\Delta q}{\Delta s}\overline{m} = 0.$$

Pasando al límite cuando $\Delta s \to 0$ tendremos (ya que $\Delta\overline{w} \to 0$)

$$\overline{\alpha}'(s) + v\,\overline{w}'(s) + \left(\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta s}\right)\,\overline{w} + \left(\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta s}\right)\,\overline{m} = 0.$$

Finalmente multiplicando escalarmente por $\overline{w}'(s)$, los dos últimos sumandos son nulos

$$\langle \overline{\alpha}'(s), \overline{w}'(s)\rangle + v\langle \overline{w}'(s), \overline{w}'(s)\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{\langle \overline{\alpha}'(s), \overline{w}'(s)\rangle}{\langle \overline{w}'(s), \overline{w}'(s)\rangle}.$$

El punto A con coordenadas $\overline{\alpha}(s) + v\overline{w}$ es el punto central. Substituyendo el valor de v calculado y llamando $\overline{\sigma}(s)$ al lugar geométrico de todos los posibles A, tendremos

$$\overline{\sigma}(s) = \overline{\alpha}(s) + v\,\overline{w}(s) = \overline{\alpha}(s) - \frac{\langle \overline{\alpha}'(s), \overline{w}'(s)\rangle}{\langle \overline{w}'(s), \overline{w}'(s)\rangle}\,\overline{w}(s) = \overline{\alpha}(s) - \langle \overline{\alpha}'(s), \overline{w}'(s)\rangle\,\overline{w}(s)$$

obviamente no dependen de v. En el caso de un parámetro arbitrario sabemos que $\overline{\alpha}'(s) = \overline{\alpha}'(u)u'(s)$, asimismo $\overline{w}'(s) = \overline{w}'(u)u'(s)$. Los factores$|u'(s)|^2$ en la primera igualdad se cancelan, o bien en la segunda a partir de $u'(s) = 1/|\overline{w}'(u)|$, en cualquier caso queda

$$\overline{\sigma}(u) = \overline{\alpha}(u) - \frac{\langle \overline{\alpha}'(u), \overline{w}'(u)\rangle}{\langle \overline{w}'(u), \overline{w}'(u)\rangle}\,\overline{w}(u). \tag{36}$$

Resulta obvio, por otro lado, que la línea de estricción está sobre la superficie, podemos por tanto utilizarla como directriz o línea base, sin más que despejar $\overline{\alpha}(u)$ en (36) y substituir en la ecuación de la curva

$$\overline{x}(u, v) = \overline{\sigma}(u) + (v + v_0)\,\overline{w}(u), \qquad \text{con } v_0 = \frac{\langle \overline{\alpha}'(u), \overline{w}'(u)\rangle}{\langle \overline{w}'(u), \overline{w}'(u)\rangle}.$$

□

Ejemplo 2.7. *Es inmediato que el vértice de un cono es su único punto central, en este caso* $\overline{\sigma}(u) = [a, b, c]$*; en el caso del helicoide* $\overline{x}(u, v) = [av\cos u, av\,\mathrm{sen}\,u, bu]$*, la línea de estricción es el eje OZ, es decir* $\overline{\sigma}(u) = [0, 0, bu]$*; y en el caso del hiperboloide de una hoja* $\overline{x}(u, v) = [\cos u, \mathrm{sen}\,u, 0] + v[(-\mathrm{sen}\,u - \cos\mathrm{sen}\,u), (\cos u - \mathrm{sen}\,u), 1]$*, la línea de estricción es la circunferencia* $\overline{\sigma}(u) = \frac{1}{2}[\cos u - \mathrm{sen}\,u, \cos u + \mathrm{sen}\,u, 1]$.

Ejercicio 2.2. Dada la banda de Moebius[61] $\overline{x}(u, v) = [3\,\mathrm{sen}\,u, 3\cos u + 2v\cos\frac{u}{2}, 2v\,\mathrm{sen}\,\frac{u}{2}]$, determinar su línea de estricción.

2.8.2 Superficies desarrollables. Desarrollable tangencial

Definición 2.8. *Se dice que una superficie reglada es desarrollable*[62] *cuando tienen plano tangente único a lo largo de cada generatriz.*

Observación 2.17. *Hay superficies regladas que no son desarrollables. El ejemplo típico es el hiperboloide de una hoja. Más adelante veremos que las superficies desarrollables se caracterizan porque tienen curvatura gaussiana nula en todos sus puntos. Obviamente esto no ocurrirá con el hiperboloide de una hoja.*

Ejemplo 2.8. *Tanto el cono como el cilindro son superficies desarrollables. Menos obvias son el helicoide desarrollable*[63] *, de ecuaciones*

$$\begin{aligned} \overline{x}(u, v) &= [a\cos u - av\,\mathrm{sen}\,u, a\,\mathrm{sen}\,u + av\cos u, bu + bv] \\ &= [a\cos u, a\,\mathrm{sen}\,u, bu] + v\;[a\cos(u + \pi/2), a\,\mathrm{sen}(u + \pi/2), b]. \end{aligned}$$

Definición 2.9. *Se llama superficie desarrollable tangencial asociada a una curva alabeada* $\overline{\alpha}(u) = [x(u), y(u), z(u)]$*, a la superficie reglada que tiene de ecuación*

$$\overline{x}(u, v) = \overline{\alpha}(u) + v\,\overline{\alpha}'(u).$$

Es decir se trata de la superficie engendrada por las tangentes[64] *a una curva alabeada.*

Proposición 2.10. *La desarrollable tangencial es una superficie desarrollable.*

DEM. Si la curva directriz o soporte viene[65] dada en función del parámetro arco $\overline{\alpha}(s)$, la ecuación de la superficie será $\overline{x}(s, v) = \overline{\alpha}(s) + v\,\overline{t}(s)$, tenemos entonces que $\overline{x}'_s = \overline{t} + v\,\kappa\,\overline{n}$, y también $\overline{x}'_v = \overline{t}$, por lo que se cumple

$$\overline{x}'_s \times \overline{x}'_v = v\,\kappa\,(\overline{n} \times \overline{t}) = -v\,\kappa\,\overline{b},$$

[61] La banda de Moebius asi construida es reglada pero no desarrollable. La verdadera banda de Moebius, es decir, la construida doblando una hoja rectangular y pegando sus bordes es desarrollable por construcción, pero su parametrización no es trivial.

[62] Una definición clásica y equivalente a la dada es: “Se dice que una superficie es desarrollable cuando está constituida por el conjunto de las tangentes a una línea alabeada”, esa línea alabeada se denomina arista de retroceso de la superficie desarrollable. Nótese que toda desarrollable reglada, aunque no este parametrizada como reglada. El ejemplo típico es el hiberboloide una hoja $\overline{x}(u, v) = [u - v, u + v, u^2 - v^2]$.

[63] Una cinta de papel matamoscas. Nótese la pendiente hacia el interior (que puede ser hacia el exterior si el segundo sumando vale $[-\mathrm{sen}(u), \cos(u), -b]$, con $a, b > 0$) a diferencia de lo que ocurre con el helicoide recto.

[64] Del mismo modo podríamos considerar la superficie engendrada por la normal o por la binormal, serían obviamente regladas pero, curiosamente, no siempre desarrollables.

[65] No es esencial esta suposición pues si suponemos que $\overline{x}(u, v)$ aparecería simplemente un factor escalar que no alteraría en nada el resultado.

para cualquier valor de v. Por tanto $\overline{N} = \bar{b}$ ó $\overline{N} = -\bar{b}$, para cualquier v, en consecuencia el plano tangente a lo largo de una generatriz coincide con el plano osculador del punto sobre la curva que corresponde a dicha generatriz.

Evidentemente otra manera de definir la desarrollable tangencial es como la superficie envolvente de los planos osculadores de la curva. □

Observación 2.18. *Los cilindros, conos y desarrollables tangenciales (el helicoide desarrollable es la desarrollable tangencial de la hélice circular), se llaman superficies desarrollables porque la superficie es extensible sobre el plano.*

El helicoide desarrollable se obtiene recortando una corona circular de papel y comunicado el orificio interior con el exterior mediante un corte, alabeando luego la corona colocándola sobre una hélice circular situada sobre un cilindro. Conectando entre si varias de estas tiras resulta el helicoide desarrollable.

Recíprocamente se puede obtener una superficie desarrollable plegando un plano, sin dilatarlo ni contraerlo. Los ejemplos típicos son el cono y el cilindro.

Observación 2.19. *Las superficies desarrollables ($K = 0$ en todos*[66] *sus puntos) resultan siempre engendradas por rectas (pág. 82 [14]) ya que hemos visto que son cilindros, conos o desarrollables tangenciales, es decir son siempre superficies regladas. Recuérdese que hay superficies regladas que no son desarrollables tales como el paraboloide hiperbólico o el hiperboloide de una hoja.*

2.8.3 Superficies de revolución

Definición 2.10. *Se denomina superficie de revolución a la superficie engendrada por una curva que gira alrededor de una recta denominada eje de revolución.*

Observación 2.20. *Podemos suponer*[67] *que la curva está situada en un plano que contiene al eje sin cortarlo. También supondremos que la curva no tiene puntos multiples*[68]

Definición 2.11. *Se denomina parametrización* estándar *de una superficie de revolución a la que tiene por ecuaciones*

$$\overline{x}(u, v) = [\lambda(u) \cos v, \lambda(u) \operatorname{sen} v, \mu(u)], \tag{37}$$

o cualquier permutación de sus componentes, siendo $[\lambda(u), \mu(u)]$ una curva, que para la expresión (37) está en el plano OXZ ó el OYZ, y se hace girar alrededor el eje OZ (en el primer caso $\lambda(u) = x_1(u)$ en el segundo $\lambda(u) = x_2(u)$).

[66]En realidad el teorema topológicamente correcto ver [9] pág. 54, diría: *Una superficie cerrada y conexa es desarrollable, si y solo si, su curvatura de Gauss es idénticamente nula.* Podríamos construir superficies no regladas con curvatura gaussiana nula –ver pág. 80 de [10]– pero fallaría alguna de esas dos condiciones

[67]Nada se opone a que podamos considerar curvas alabeadas girando en torno a algún eje. Por ejemplo si dicho eje fuera el OZ y la curva tuviera de ecuación $\overline{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]$, la superficie de revolución sería $\overline{z}(t, v) = [\sqrt{x_1(t)^2 + x_2(t)^2} \cos v, \sqrt{x_1(t)^2 + x_2(t)^2} \operatorname{sen} v, x_3(t)]$. Analogamente si giramos en torno al eje OX tendríamos $\overline{x}(t, v) = [x_1(t), \sqrt{x_2(t)^2 + x_3(t)^2} \cos v, \sqrt{x_2(t)^2 + x_3(t)^2} \operatorname{sen} v, x_3(t)]$, o bien en torno al eje OY, resultaría $\overline{y}(t, v) = [\sqrt{x_1(t)^2 + x_3(t)^2} \cos v, x_2(t), \sqrt{x_1(t)^2 + x_3(t)^2} \operatorname{sen} v]$.

[68]Podemos igualmente prescindir de esta condición, aunque obviamente las superficies engendradas tendrán singularidades debidas a puntos múltiples.

Observación 2.21. *Vimos al principio que dada una curva alabeada en el plano* $[x_1(u), x_2(u)]$ *si la situamos en el plano* OXY *y la hacemos girar alrededor del eje* OX *resulta la superficie* $\overline{x}(u,v) = [x_1(u), x_2(u)\cos v, x_2(u)\,\mathrm{sen}\, v]$, *y si la hacemos girar alrededor de* OY *resultará* $\overline{x}(u,v) = [x_1(u)\cos v, x_2(u), x_1(u)\,\mathrm{sen}\, v]$.

Ejemplo 2.9. *El cilindro, el cono, la esfera, el toro, el elipsoide de revolución, el paraboloide de revolución, la superficie del ocho, etc,.*

Para concretar consideremos el toro, que puede considerarse engendrado por una circunferencia $[r\cos u+R, r\,\mathrm{sen}\, u+R]$ *al girar alrededor por ejemplo del eje* OY, *supondremos que* $R > r$. *Tendremos según hemos señalado*

$$\overline{x}(u,v) = [(r\cos u + R)\cos v, r\,\mathrm{sen}\, u + R, (r\cos u + R)\,\mathrm{sen}\, v].$$

Proposición 2.11. *Sea* $\overline{x}(t)$ *una curva alabeada, y sea* $\overline{y}(t) = [at + x_0, bt + y_0, ct + z_0]$ *una recta dada. Entonces la superficie de revolución engendrada por* $\overline{x}(t)$ *al girar en torno a dicha recta, tiene de ecuación*

$$\overline{z}(t,u) = \overline{p}_0 + \frac{\langle \overline{x}(t) - \overline{p}_0, \overline{v}\rangle}{|\overline{v}|^2}\overline{v} + \frac{|(\overline{x}(t) - \overline{p}_0) \times \overline{v}|}{|\overline{v}|}\,(\cos u\,\overline{w}_1 + \mathrm{sen}\, u\,\overline{w}_2),$$

con $t \in [t_0, t_1]$ *y* $u \in [0, 2\pi]$, *siendo* $\overline{p}_0 = [x_0, y_0, z_0]$ *y* $\overline{v} = [a, b, c]$, *los vectores* $\overline{w}_1$ *y* $\overline{w}_2$ *son unitarios, fijos, perpendiculares entre si, y ambos ortogonales a* $\overline{v}$, *pero cumpliendo esas restricciones pueden ser cualesquiera.*

Dem. Consideremos un punto $\overline{x}(t)$ genérico de la curva, si α es el ángulo que forma el vector $\overline{x}(t) - \overline{p}_0$ con dicha recta, tendremos que la distancia de ese punto al eje será

$$\begin{aligned} d(t) &= |\overline{x}(t) - \overline{p}_0|\ \mathrm{sen}\,\alpha = |\overline{x}(t) - \overline{p}_0|\ \frac{|(\overline{x}(t) - \overline{p}_0) \times \overline{v}|}{|\overline{x}(t) - \overline{p}_0|\ |\overline{v}|} \\ &= \frac{|(\overline{x}(t) - \overline{p}_0) \times \overline{v}|}{|\overline{v}|}. \end{aligned}$$

Vamos a calcular ahora el vector de posición del pie de la perpendicular del punto $\overline{x}(t)$ a la recta. En lo que sigue notaremos $\overline{x}(t) \equiv P_1$, P será un punto arbitrario de la recta, llamaremos P^* al pie de la perpendicular, O es el origen y obviamente $P_0 = \overline{p}_0$. Se verificará $\overline{P_0P} = \lambda\overline{v}$, se cumple

$$\overline{P_1P} = \overline{P_1P_0} + \overline{P_0P} = \overline{P_1P_0} + \lambda v.$$

Tendremos que

$$\begin{aligned} \langle\overline{P_1P}, \overline{P_1P}\rangle &= \langle\overline{P_1P_0} + \lambda v, \overline{P_1P_0} + \lambda v\rangle \\ &= |\overline{P_1P_0}|^2 + 2\lambda\langle\overline{P_1P_0}, v\rangle + \lambda^2|\overline{v}|^2, \end{aligned}$$

si multiplicamos y dividimos el segundo sumando por $|\overline{v}|$ y sumamos y restamos $(\langle\overline{P_1P_0}, v\rangle/|\overline{v}|)^2$, quedará

$$\begin{aligned} \langle\overline{P_1P}, \overline{P_1P}\rangle &= \lambda^2|\overline{v}|^2 + 2\lambda|\overline{v}|\frac{\langle\overline{P_1P_0}, v\rangle}{|\overline{v}|} + \left(\frac{\langle\overline{P_1P_0}, v\rangle}{|\overline{v}|}\right)^2 + |\overline{P_1P_0}|^2 - \left(\frac{\langle\overline{P_1P_0}, v\rangle}{|\overline{v}|}\right)^2 \\ &= \left(|\overline{v}|\lambda + \frac{\langle\overline{P_1P_0}, v\rangle}{|\overline{v}|}\right)^2 + |\overline{P_1P_0}|^2 - \left(\frac{\langle\overline{P_1P_0}, v\rangle}{|\overline{v}|}\right)^2. \end{aligned}$$

La anterior expresión nos da la distancia al cuadrado de P_1 a un punto arbitrario P sobre la recta, depende de λ, y alcanza su valor mínimo si el segmento que une el eje y el punto es perpendicular al eje, esto sucede obviamente cuando el contenido del primer paréntesis es nulo, es decir cuando λ toma el valor

$$\lambda^* = -\frac{\langle \overline{P_1P_0}, v\rangle}{|\overline{v}|^2} = \frac{\langle \overline{P_0P_1}, v\rangle}{|\overline{v}|^2}.$$

En consecuencia

$$\overline{OP^*} = \overline{OP_0} + \overline{P_0P^*} = \overline{OP_0} + \lambda^*\overline{v} = \overline{p}_0 + \frac{\langle \overline{P_0P_1}, v\rangle}{|\overline{v}|^2}\,\overline{v}.$$

Resulta inmediato que la superficie será

$$\begin{aligned}\overline{z}(t,u) &= \overline{OP^*} + d(t)\,(\cos u\,\overline{w}_1 + \operatorname{sen} u\,\overline{w}_2)\\ &= \overline{p}_0 + \frac{\langle \overline{x}(t) - \overline{p}_0, \overline{v}\rangle}{|\overline{v}|^2}\overline{v} + \frac{|(\overline{x}(t) - \overline{p}_0)\times\overline{v}|}{|\overline{v}|}\,(\cos u\,\overline{w}_1 + \operatorname{sen} u\,\overline{w}_2).\end{aligned}$$

Los vectores ortonormales $\overline{w}_1$ y $\overline{w}_2$ pueden tener direcciones arbitrarias siempre que ambos sean ortogonales a $\overline{v}$. □

2.8.4 Superficie tubular

Definición 2.12. *Dada una curva alabeada $\overline{\alpha}(t)$, de curvatura no nula, llamaremos superficie tubular de radio r engendrada por ella, a la superficie*

$$\overline{x}(t,u) = \overline{\alpha}(t) + r\,\left(\cos(u)\,\overline{n}(t) + \operatorname{sen}(u)\,\overline{b}(t)\right),$$

donde $\overline{n}(t)$ y $\overline{b}(t)$ son la normal y binormal respectivamente del triedro de Frenet asociado a la curva $\overline{\alpha}(t)$.

Ejemplo 2.10. *Si consideramos la circunferencia $\overline{\alpha}(t) = [R\cos t, R\operatorname{sen} t, 0]$, situada en el plano OXY y de radio R, entonces $\overline{b}(t) = [0,0,1]$ y $\overline{n}(t) = [-\cos t, -\operatorname{sen} t, 0]$, y la superficie tubular correspondiente será*

$$\overline{x}(t,u) = [\cos t(R - r\cos u), \operatorname{sen} t(R - r\cos u), r\operatorname{sen}(u)],$$

que obviamente es un toro (resulta inmediato que dicho toro también se obtiene si hacemos girar en torno al eje OZ, la circunferencia $\overline{y}(u) = [R - r\cos u, 0, r\operatorname{sen} u]$).

Observación 2.22. *Recordemos que si para un cierto t la curvatura de flexión de una curva alabeada se anula –caso de una recta– los vectores $\overline{n}(t)$ y $\overline{b}(t)$ se anulan*[69]*, y para ciertas curvas con puntos donde esto ocurre pueden obtenerse superficies tubulares no deseadas. Un ejemplo puede ser la superficie tubular engendrada a partir de la curva alabeada $\overline{x}(t) = [\operatorname{sen}(t)\cos(t), \cos(t), t]$ en $t = \pi/2$.*

[69] O no están bien definidos, no olvidemos que $\overline{n} = \overline{x}''(s)/|\overline{x}''(s)|$ y $\overline{b} = \overline{t}\times\overline{n}$.

2.8.5 Superficies de traslación

Definición 2.13. *Dada una curva alabeada $\overline{\alpha}(u) = [\alpha_1(u), \alpha_2(u), \alpha_3(u)]$, que llamaremos directriz, y otra curva alabeada $\overline{\beta}(v) = [\beta_1(v), \beta_2(v), \beta_3(v)]$, que denominaremos generatriz, (supondremos para visualizarla mejor que ambas curvas se cortan*[70] *en un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = \overline{\alpha}(u_0) = \overline{\beta}(v_0)$). Llamaremos superficie de traslación a la superficie constituida por todas las curvas que se obtienen al trasladar la curva $\overline{\beta}(v)$ paralelamente a si misma según la curva $\overline{\alpha}(u)$.*

Proposición 2.12. *Las ecuaciones de la superficie de traslación vienen dadas por*

$$\overline{x}(u, v) = \overline{\alpha}(u) + \overline{\beta}(v) - \overline{\beta}(v_0).$$

DEM. Trivial □

Ejemplo 2.11. *Los ejemplos más claros se consiguen con curvas alabeadas planas: un par de superficies de traslación, diferentes a pesar de la aparente similitud en su generación (parábola + circunferencia) son*

$$\begin{aligned} \overline{x}(u, v) &= [u^2, 0, u] + [0, \operatorname{sen} v, \cos(v)] - [0, 0, 1] \\ \overline{x}(u, v) &= [u^2, 0, u] + [\operatorname{sen} v, \cos(v), 0] - [0, 1, 0] \end{aligned}$$

con $v \in [0, 2\pi]$ y $u \in [-1, 1]$. Otros ejemplos sencillos son

$$\begin{aligned} \overline{x}(u, v) &= [u, u^2, u] + [v, 0, v^2], \\ \overline{x}(u, v) &= [u, u^2, 0] + [\operatorname{sen} v, \cos(v), v], \end{aligned}$$

con $(u, v) \in [-3, 3] \times [-1, 1]$ y $(u, v) \in [-3, 3] \times [0, 2\pi]$ respectivamente. Algunas superficies tubulares son casos particulares de superficies de traslación,

$$\overline{x}(u, v) = [\sin(u), \cos(u), 0] + [\sin(v), \cos(v), 3v],$$

con $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, 2\pi]$.

2.9 Envolvente de una familia de superficies

Definición 2.14. *Consideremos la familia uniparamétrica de superficies $F(x, y, z, \mu) = 0$. Si en una cierta región del espacio las ecuaciones*

$$F(x, y, z, \mu) = 0, \qquad F'_\mu(x, y, z, \mu) = 0$$

representan una curva C_μ –tengamos en cuenta que bajo ciertas condiciones la intersección de dos superficies es una curva–. Dicha curva recibe el nombre de curva característica *de la superficie $F(x, y, z, \mu_0) = 0$.*

Si variamos μ, las curvas características C_μ engendran una superficie S, esta superficie S (excluidos los puntos singulares de las superficies de la familia) recibe el nombre de envolvente de la familia de superficies.

[70]Esta condición no es estrictamente necesaria, comprobarlo con el ejemplo que citamos si se elimina el -1.

De modo análogo si en una cierta región del espacio las ecuaciones

$$F(x,y,z,\mu)=0, \qquad F'_\mu(x,y,z,\mu)=0, \qquad F''_{\mu\mu}(x,y,z,\mu)=0,$$

permitir determinar un punto P_μ, lo que puede ocurrir o no, para cada valor $\mu=\mu_0$ dicho punto recibe el nombre de punto característico *de la superficie $F(x,y,z,\mu_0)=0$. Al lugar geométrico de los puntos característicos se le denomina* arista de retroceso *de la envolvente.*

Observación 2.23. *Por tanto el cálculo de la ecuación implícita de la envolvente se reduce a eliminar μ entre las ecuaciones*

$$F(x,y,z,\mu)=0, \qquad F'_\mu(x,y,z,\mu)=0.$$

Ejemplo 2.12. *Supongamos dada una curva alabeada, y con ella su familia uniparamétrica de planos osculadores. La envolvente de dicha familia, si es que existe, es la superficie reglada desarrollable tangencial correspondiente. Las curvas características son las rectas generatrices, los puntos característicos son los puntos sobre la curva y la arista de retroceso*[71]*, al igual que la línea de esctricción, es la propia curva alabeada.*

Ejemplo 2.13. *Dada una curva alabeada $\overline{\alpha}(t)$, podríamos definir la superficie del toro anteriormente descrita, como la envolvente de un conjunto infinito de esferas de radio constante r, cuyo centro se desplazara sobre una circunferencia de radio $R>r$. La curva característica –para cada valor del parámetro– es cada una de las circunferencias. Su envolvente es el toro y no hay arista de retroceso.*

Ejemplo 2.14. *Supongamos dada una curva alabeada, y con ella su familia uniparamétrica de planos normales. Las curvas características son paralelas a las binormales y pasan por los centros de curvatura de la curva. La arista de retroceso es el lugar geométrico del centro de las esferas osculatrices.*

Observación 2.24. *Si consideramos una familia uniparamétrica de planos $\langle\overline{OX},\overline{a}(u)\rangle + b(u)=0$. Donde como sabemos $\overline{OX}=\overline{x}$ es el vector de posición de un punto del plano, $\overline{a}(u)$ es el vector que une cada plano con el origen y $b(u)$ es una constante (una vez elegido u). La recta característica se calcula*[72]*, cuando exista, resolviendo*

$$\langle\overline{x},\overline{a}(u)\rangle + b(u)=0, \qquad \langle\overline{x},\overline{a}'(u)\rangle + b'(u)=0. \tag{38}$$

La ecuación de la envolvente se obtendrá eliminando u en (38). El lugar geométrico de los puntos característicos o arista de retroceso se determina a partir

$$\begin{aligned}\langle\overline{x},\overline{a}(u)\rangle + b(u) &= 0\\ \langle\overline{x},\overline{a}'(u)\rangle + b'(u) &= 0\\ \langle\overline{x},\overline{a}''(u)\rangle + b''(u) &= 0,\end{aligned}$$

poniendo $\overline{x}$ en función de un solo parámetro.

[71] La elección de este nombre está perfectamente justificada. La superficie desarrollable tangencial presenta un borde afilado a lo largo de dicha arista, ver pags. 77 y 78 de [14]. Representar $\overline{x}(t,u)=[\cos(t)-u\,\mathrm{sen}(t), \mathrm{sen}(t)+u\cos(t), t+u]$, $t\in[0,2\pi]$, $u\in[-1,1]$. Para $u=0$ tenemos la arista de retroceso.

[72] Aplicando Rolle como en la obtención del plano osculador que pasa por tres puntos consecutivos.

Ejemplo 2.15. *Dada la familia uniparamétrica de planos* $u^3 - 3u^2x + 3uy - z = 0$. *Se pide i) Determinar la arista de retroceso de la envolvente de la familia; ii) Calcular dicha envolvente; iii) Comprobar que la familia de planos osculadores asociada a la arista de retroceso es justamente la familia uniparamétrica dada. Veamos:*

i) Derivamos $u^3 - 3u^2x + 3uy - z = 0$ *respecto de* u *y queda* $3u^2 - 6ux + 3y = 0$. *Volvemos a derivar respecto de* u *y tenemos* $6u - 6x = 0$ *luego* $x = u$. *Substituyendo en la primera derivada resulta* $3u^2 - 6u^2 + 3y = 0$, *de donde* $y = u^2$. *Finalmente de la ecuación dada obtenemos* $u^3 - 3u^3 + 3u^3 - z = 0$, *por tanto* $z = u^3$. *La arista de retroceso pedida es la curva*

$$\overline{y}(u) = [u, u^2, u^3].$$

ii) La envolvente es la desarrollable tangencial de la arista de retroceso, que será la superficie, obviamente reglada,

$$\begin{aligned}\overline{x}(u,v) &= \overline{y}(u) + v\,\overline{y}'(u)\\ &= [u, u^2, u^3] + v[1, 2u, 3u^2] = [u+v, u^2+2uv, u^3+3vu^2]\end{aligned}$$

iii) Comprobación. Veamos que la familia de planos osculadores de la arista de retroceso es justamente la familia de planos dada. En efecto, teniendo en cuenta que $\overline{y}''(u) = [0, 2, 6u]$, *resulta que los planos osculadores son*

$$\begin{vmatrix} x-u & y-u^2 & z-u^3 \\ 1 & 2u & 3u^2 \\ 0 & 2 & 6u \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; 3u^2x - u^3 - 3uy + z = 0.$$

Ejercicio 2.3. *Hallar la envolvente y la arista de retroceso de la familia uniparamétrica de planos* $18a^2x + y - 6az - 3a^4 = 0$.

2.10 Curvatura normal. Segunda Forma cuadrática fundamental. Direcciones asintóticas.

Observación 2.25. *Para definir y estudiar la curvatura de una superficie en un cierto punto* P, *consideraremos el haz de planos definido por* $\overline{N}$, *la normal a la superficie en* P. *Ese haz de planos al cortar a la superficie genera una familia de curvas que pasan por* P. *Esas curvas así construidas se denominan secciones normales de la superficie en* P. *Del estudio de la curvatura de flexión de esas secciones normales deduciremos importantes consecuencias sobre la superficie.*

Antes de abordar ese estudio introduciremos el concepto de curvatura normal en un punto P *aplicable a cualquier curva, que no tiene porqué ser sección normal, contenida en la superficie y que pase por* P.

Consideremos una curva sobre una superficie dada, supongamos que dicha curva pasa por el punto P *con tangente* $\overline{t}$, *normal* $\overline{n}$ *y vector de curvatura* $\overline{\kappa}$. *Sabemos que necesariamente la tangente a la curva ha de estar contenida en el plano tangente, es decir* $\langle \overline{t}, \overline{N} \rangle = 0$. *Sin embargo la normal a la curva* $\overline{n}$ *no tiene porqué estar en dicho plano.*

Sabemos que el vector curvatura $\overline{\kappa}$ *tiene la dirección de* $\overline{n}$. *Podemos proyectar el vector curvatura* $\overline{\kappa}$, *sobre el plano tangente a la superficie y en la dirección de* $\overline{N}$. *Denominaremos*

$\overline{\kappa}_t$ y $\overline{\kappa}_n$ respectivamente[73] *a las respectivas componentes, con lo que podemos escribir*

$$\overline{\kappa} = \overline{t}'(s) = \overline{\kappa}_n + \overline{\kappa}_t.$$

Definición 2.15. *Llamaremos curvatura normal de una curva respecto de la superficie que la contiene en P, al escalar κ_n, que aparece al escribir $\overline{\kappa}_n = \kappa_n \overline{N}$. Es claro que $\kappa_n = \langle \overline{N}, \overline{\kappa}_n \rangle$.*

Definición 2.16. *Fijado un punto de una superficie. Llamamos sección normal a cualquiera de las curvas que resultan al cortar la superficie por uno de los planos del haz determinado por el vector $\overline{N}$ en el punto dado. Se hablará de la sección normal en una dirección dada $\lambda = dv/du$, o $\mu = du/dv$, a la curva que resulta de cortar la superficie por el plano del haz que contiene a la tangente a la superficie en dicha dirección.*

Observación 2.26. *Recordemos que dada una curva sobre la superficie mediante la ecuación $\varphi(u,v) = 0$, derivando tenemos que la pendiente (respecto del "eje" $v =$ cte. que pasa por el punto de que se trate) de la tangente a dicha curva viene dada por*

$$\frac{dv}{du} = -\frac{\varphi'_u}{\varphi'_v} = \lambda.$$

En otras palabras conocer λ es como tener definida una dirección sobre la superficie. Obviamente si además damos un punto P, queda fijada la sección normal sobre la superficie.

Observación 2.27. *Nótese que la curvatura de una sección normal en el punto $P \equiv (u_0, v_0)$ donde calculamos el vector $\overline{N}$ tiene componente tangencial nula, debido a que para las secciones normales se cumple $\overline{n} = \overline{N}$, ya que las secciones normales son curvas planas contenidas en el haz definido por $\overline{N}$, por tanto para ellas la curvatura normal coincide con la curvatura de flexión, es decir $\kappa = \kappa_n$.*

Esto no quiere decir que en otro punto de la sección normal diferente al (u_0, v_0), los vectores $\overline{N}$ y $\overline{n}$ tengan la misma dirección. La fórmula (39) nos proporciona la curvatura en (u_0, v_0) para las diferentes secciones normales y la curvatura normal para otras curvas que pasando por el punto no sean seccíones normales.

Definición 2.17. *Llamaremos*

$$e = -\langle x'_u, \overline{N}'_u \rangle, \qquad 2f = -[\langle \overline{x}'_v, \overline{N}'_u \rangle + \langle \overline{x}'_u, \overline{N}'_v \rangle], \qquad g = -\langle \overline{x}'_v, \overline{N}'_v \rangle.$$

Proposición 2.13. *Sea $\lambda = \dfrac{dv}{du}$ la pendiente de la tangente a la curva dada $v = v(u)$ sobre la superficie $\overline{x}(u,v)$ en el punto P, entonces se cumple que la curvatura normal en dicha dirección vale*

$$\kappa_n = \frac{e + 2f\lambda + g\lambda^2}{E + 2F\lambda + G\lambda^2}. \tag{39}$$

[73] κ_t recibe el nombre de curvatura tangencial o geodésica. Las geodésicas se definen como aquellas curvas sobre la superficie a lo largo de las cuales la curvatura tangencial es nula. Más adelante probaremos que las geodésicas son también las curvas más cortas que unen dos puntos cualquiera de una superficie dada.

DEM. Hemos señalado que $\overline{t}\perp\overline{N}$. Por lo que $\langle\overline{N},\overline{t}\rangle = 0$. Derivando esta expresión respecto de s obtenemos

$$\langle\frac{d\overline{N}}{ds},\overline{t}\rangle + \langle\overline{N},\frac{d\overline{t}}{ds}\rangle = 0,$$

substituyendo $\dfrac{d\overline{t}}{ds} = \overline{\kappa} = \overline{\kappa}_n + \overline{\kappa}_t$, resulta al ser $\overline{\kappa}_t\perp\overline{N}$, que

$$\langle\frac{d\overline{N}}{ds},\overline{t}\rangle + \langle\overline{N},(\overline{\kappa}_n + \overline{\kappa}_t)\rangle = \langle\frac{d\overline{N}}{ds},\overline{t}\rangle + \kappa_n = 0.$$

Luego

$$\begin{aligned}
\kappa_n &= -\langle\overline{t},\frac{d\overline{N}}{ds}\rangle = -\langle\frac{d\overline{x}}{ds},\frac{d\overline{N}}{ds}\rangle \\
&= -\frac{\langle d\overline{x},d\overline{N}\rangle}{ds^2} = -\frac{\langle(\overline{x}'_u du + \overline{x}'_v dv),(\overline{N}'_u du + \overline{N}'_v dv)\rangle}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} \\
&= \frac{\langle-\overline{x}'_u,\overline{N}'_u\rangle du^2 + [\langle-\overline{x}'_v,\overline{N}'_u\rangle + \langle-\overline{x}'_u,\overline{N}'_v\rangle]dudv + \langle-\overline{x}'_v,\overline{N}'_v\rangle dv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} \\
&= \frac{e + 2f\lambda + g\lambda^2}{E + 2F\lambda + G\lambda^2}.
\end{aligned}$$

Hemos dividido por du^2 numerador y denominador y substituido $\lambda = \dfrac{dv}{du}$, y utilizado la definición previa de e, f y g. □

Observación 2.28. *Si hacemos $\lambda = 0$ en*

$$\kappa_n = \frac{e + 2f\lambda + g\lambda^2}{E + 2F\lambda + G\lambda^2},$$

lo que equivale a considerar $\dfrac{dv}{du} = 0$ y por tanto $v =$ cte. Estamos calculando la curvatura normal en la dirección de la curva coordenada $v =$ cte., y obtenemos $\kappa_n = e/E$. Por otro lado si hacemos $\lambda = \infty$, es decir $\mu = \dfrac{du}{dv} = 0$, tenemos $u =$ cte., y obtenemos la curvatura normal en dicha dirección, y resulta entonces $\kappa_n = g/G$. No debe confundirse esta curvatura con la curvatura de la propia curva paramétrica en el punto (identidad que solo ocurriría si la curva paramétrica fuera a su vez sección normal).

Para averiguar, dado un valor de λ, cual es el ángulo que forma dicha dirección con la curva coordenada $v =$ cte. hay[74] que recurrir a las fórmulas de la parte inferior de la página 40.

[74] En ocasiones es necesario convertir una "dirección" tomada sobre el plano tangente, a partir de un escalar como $\lambda = dv/du$, o $\mu = du/dv$, en un vector tridimensional o viceversa. Obviamente es sencillo si tenemos en cuenta que (du, dv) son las coordenadas respecto de los vectores direccionales $\overline{x}'_u$ y $\overline{x}'_v$ de cualquier dirección $d\overline{x}$ tomada sobre el plano tangente, ya que $d\overline{x} = \overline{x}'_u\, du + \overline{x}'_v\, dv$. Por tanto, dado un vector situado sobre el plano tangente, por ejemplo $\overline{w}$, siempre se podrá escribir como $\overline{w} = \alpha\,\overline{x}'_u + \beta\,\overline{x}'_v$, podremos obtener los valores α y β y con ellos obtener la dirección $\lambda = \beta/\alpha$ o la $\mu = \alpha/\beta$, según interese, buscada. Recíprocamente, dada una dirección $\lambda = m_2/m_1$ o $\mu = m_1/m_2$, el vector en esa dirección corresponderá a $\overline{v} = m_1\overline{x}'_u + m_2\overline{x}'_v$. En el caso de que $\alpha = 0$, habriamos de trabajar obligadamente con la dirección $\mu = du/dv$. Si se diera el caso de que $\beta = 0$, tendríamos que hacerlo con $\lambda = dv/du$.

Corolario 2.7. *Podemos obtener también e, f, g mediante:*

$$e = \langle \overline{x}''_{uu}, \overline{N} \rangle, \qquad f = \langle \overline{x}''_{uv}, \overline{N} \rangle, \qquad g = \langle \overline{x}''_{vv}, \overline{N} \rangle.$$

DEM. A partir de las ecuaciones:

$$\langle \overline{x}'_u, \overline{N} \rangle = 0, \qquad \langle \overline{x}'_v, \overline{N} \rangle = 0.$$

Basta simplemente con derivar respecto de u y v la primera y la segunda y cualquiera de ellas respecto de la variable que no este derivada $\overline{x}$. En efecto derivando tenemos

$$\begin{array}{ccc} \langle \overline{x}''_{uu}, \overline{N} \rangle + \langle \overline{x}'_u, \overline{N}'_u \rangle = 0 & \Longrightarrow & -\langle \overline{x}'_u, \overline{N}'_u \rangle = \langle \overline{x}''_{uu}, \overline{N} \rangle \\ \langle \overline{x}''_{vv}, \overline{N} \rangle + \langle \overline{x}'_v, \overline{N}'_v \rangle = 0 & \Longrightarrow & -\langle \overline{x}'_v, \overline{N}'_v \rangle = \langle \overline{x}''_{vv}, \overline{N} \rangle. \end{array}$$

Luego

$$e = \langle \overline{x}''_{uu}, \overline{N} \rangle, \qquad g = \langle \overline{x}''_{vv}, \overline{N} \rangle.$$

Del mismo modo derivando $\langle \overline{N}, \overline{x}'_u \rangle$ respecto de v y analogamente $\langle \overline{N}, \overline{x}'_v \rangle$ respecto de u y sumando se tiene que

$$\begin{array}{rcl} \langle \overline{x}''_{uv}, \overline{N} \rangle + \langle \overline{x}'_u, \overline{N}'_v \rangle & = & 0 \\ \langle \overline{x}''_{vu}, \overline{N} \rangle + \langle \overline{x}'_v, \overline{N}'_u \rangle & = & 0 \\ -(\langle \overline{x}'_u, \overline{N}'_v \rangle + \langle \overline{x}'_v, \overline{N}'_u \rangle) & = & \langle \overline{x}''_{uv}, \overline{N} \rangle + \langle \overline{x}''_{vu}, \overline{N} \rangle \\ & = & 2\langle \overline{x}''_{uv}, \overline{N} \rangle = 2f. \end{array}$$

Es decir $f = \langle \overline{x}''_{uv}, \overline{N} \rangle$. Utilizando este resultado y la primera ecuación anterior, resulta que $f = -\langle \overline{x}'_u, \overline{N}'_v \rangle$, análogamente de la segunda $f = -\langle \overline{x}'_v, \overline{N}'_u \rangle$. Hemos obtenido como subproducto otra manera de obtener f, i.e.

$$f = -\langle \overline{x}'_u, \overline{N}'_v \rangle = -\langle \overline{x}'_v, \overline{N}'_u \rangle.$$

□

Ejemplo 2.16. *Los coeficientes e, f, g son:*

i) $e = f = 0$ *y* $g = ab/\sqrt{a^2 + (b^2 - a^2)\cos^2 v}$, *para el cilindro* $\overline{x}(u, v) = [a \cos v, b \sin v, u]$.

ii) $e = r$, $f = 0$ *y* $g = r \cos^2 u$, *para la esfera* $\overline{x}(u, v) = [r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, r \sin u]$.

iii) $e = f = 0$ *y* $g = au/\sqrt{a^2 + 1}$, *para el cono* $\overline{x}(u, v) = [u \cos(v), u \sin(v), au]$.

iv) $e = f = 0$,*y* $g = au/\sqrt{2}$, *para el helicoide desarrollable* $\overline{x}(u, v) = [a \cos v - au \sin v, a \sin v + au \cos v, a(u + v)]$.

Definición 2.18. *Se denomina segunda forma fundamental a la forma cuadrática*

$$edu^2 + 2fdudv + gdv^2 = (du, dv) \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}.$$

A veces se denota como $\mathrm{II}(du, dv) = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$ *o simplemente como* II.

Definición 2.19. *Llamaremos direcciones asintóticas en un punto dado P de una superficie $\overline{x}(u,v)$, a aquellas direcciones λ para las se cumpla*[75]

$$e + 2f\lambda + g\lambda^2 = 0.$$

Observación 2.29. *La anterior igualdad se da por ejemplo (aunque no solo en ese caso*[76] *) cuando hay rectas sobre la superficie que pasan por el punto en cuestión, ya que en esas direcciones $\kappa = 0$ y por tanto $\kappa_n = 0$. Intuitivamente son las direcciones a lo largo de las cuales la superficie se curva menos. Por ejemplo las generatrices de un cilindro o un cono o de cualquier otra superficie reglada.*

Definición 2.20. *Se denominan curvas o líneas asintóticas a las envolventes de las direcciones asintóticas en cada punto. Dicho en otras palabras: son aquellas curvas cuyas tangentes en cada punto coinciden con las direcciones asintóticas a la superficie en ese punto.*

Definición 2.21. *De la ecuación $e + 2f\lambda + g\lambda^2 = 0$, resulta que*

$$\lambda = \frac{-2f \pm \sqrt{4f^2 - 4eg}}{2g} = \frac{-f \pm \sqrt{f^2 - eg}}{g}.$$

Observamos que $eg - f^2$ es el discriminante de la anterior ecuación cambiado de signo. Del estudio del signo de $eg - f^2$ resulta una clasificación de los puntos de la superficie:

i) Punto elíptico si $f^2 - eg < 0$ (no hay direcciones asintóticas)

ii) Punto parabólico si $f^2 - eg = 0$ (hay una dirección asintótica).

iii) Punto hiperbólico si $f^2 - eg > 0$ (hay dos direcciones asintóticas).

Observación 2.30. *El vector $\overline{\kappa}_n$ tiene la dirección del vector normal $\overline{N}$ a la superficie. Elegido un sentido para $\overline{N}$, el vector $\overline{\kappa}_n$ tendrá el sentido de $\overline{N}$ si $\kappa_n > 0$ y el opuesto si $\kappa_n < 0$. Como el denominador de (39) siempre es positivo, el signo de κ_n dependerá solamente del signo de la segunda forma cuadrática.*

En el caso i) la superficie esta siempre del mismo lado que el plano tangente y no hay direcciones asintóticas (aquellas para las que $\kappa_n(\lambda) = 0$), (es el caso, por ejemplo, del plano tangente a un elipsoide o una esfera. En el caso ii), si suponemos que e, f y g no se anulan simultáneamente, entonces la forma cuadrática es semidefinida, hay una sola raíz-dirección en la que $\kappa_n(\lambda) = 0$, en las restantes se comporta como punto elíptico (es el caso del plano tangente a un cilindro). Si $eg - f^2 < 0$, entonces la segunda forma cuadrática es indefinida, por tanto no conserva el signo y hay dos direcciones para las que $\kappa_n(\lambda) = 0$. La superficie estará parte en un lado, parte en otro del plano tangente (plano tangente en un punto silla).

Ejemplo 2.17. *Consideremos el toro. Un sencillo cálculo nos mostraría que posee las tres clases de puntos. Los puntos de las circunferencias inferior y superior de radio R paralelas a la circunferencia guía son parabólicos y dividen entre ambas al toro en dos regiones, los puntos de la zona de la perforación son hiperbólicos y los de la región exterior elípticos.*

[75] O bien $e\mu^2 + 2f\mu + g = 0$, para el caso en que $g = f = 0$.

[76] Un punto hiperbólico del toro presenta dos direcciones asintóticas que no son rectas: las direcciones que marcan las asíntotas de la hipérbola de Dupin.

2.11 Teorema de Meusnier

Proposición 2.14. *Todas las curvas que pasan por un punto dado P y tienen en ese punto la misma tangente tienen el mismo vector curvatura normal (aunque obviamente no tengan porqué tener la misma curvatura de flexión).*

DEM. Es evidente que los coeficientes e, f, g y E, F, G son constantes en P. Consideremos ahora la ecuación (39), observamos que el miembro de la derecha, para un punto fijo P, solo depende de λ. Por tanto $\kappa_n(\lambda)$ tomará el mismo valor para dos curvas que tenga el mismo valor $\lambda = \dfrac{dv}{du}$ en el punto P. Lo que equivale a decir que todas las curvas que pasando por P tienen la misma tangente poseen la misma curvatura normal. □

Corolario 2.8. *(Teorema de Meusnier) El radio de curvatura R de una curva Γ en una dirección no asintótica de P, es la proyección sobre la normal a la curva Γ del radio de curvatura R_n de la sección normal correspondiente a la tangente a Γ en P. Lo que puede expresarse como*

$$R_n \cos\varphi = R,$$

donde φ es el ángulo que forman $\overline{N}$ y $\overline{n}$, $0 \le \varphi \le \pi/2$.

DEM. Dado el punto P y la dirección λ marcada por Γ. Consideremos la sección normal correspondiente a dicha dirección. Si φ es el ángulo que para la curva Γ forman $\overline{n}$ y $\overline{N}$ tendremos que

$$\kappa_n = \langle \overline{\kappa}, \overline{N} \rangle = \kappa \cos\varphi$$

Utilizando los radios de curvatura en vez de la curvatura tenemos que

$$\frac{1}{R_n} = \frac{1}{R}\cos\varphi \implies R = R_n \cos\varphi.$$

□

Una formulación diferente, pero obviamente equivalente es la siguiente.

Proposición 2.15. *Si se considera el haz de planos que pasa por la tangente a una superficie en una dirección no asintótica, los círculos osculadores de las curvas que resultan de la intersección con la superficie están sobre una esfera.*

Por último veamos una forma sencilla de obtener el haz normal en un punto de la superficie.

Proposición 2.16. *(Obtención del haz normal)*
Si $\{\overline{e}_1(u_0, v_0), \overline{e}_2(u_0, v_0), \overline{N}(u_0, v_0)\}$ es el triedro que resulta de ortonormalizar el triedro móvil $\{\overline{x}'_u(u_0, v_0), \overline{x}'_v(u_0, v_0), \overline{N}(u_0, v_0)\}$, correspondiente a la superficie $\overline{x}(u, v)$ en el punto (u_0, v_0), entonces la expresión paramétrica de cualquier plano del haz normal viene dada por

$$\overline{y}(p, q, u_0, v_0, \theta) = \overline{x}(u_0, v_0) + p\overline{N}(u_0, v_0) + q\left[\overline{e}_1(u_0, v_0)\cos\theta + \overline{e}_2(u_0, v_0)\sin\theta\right].$$

DEM. Resulta inmediato si consideramos un plano que pasa por el punto $\overline{x}(u_0, v_0)$ y contiene al vector $\overline{N}(u_0, v_0)$ y a un vector unitario, variable con θ, situado en el plano tangente y con el origen de ángulos según $\overline{e}_1$, es decir $\overline{x}'_u(u_0, v_0)$, y que no es otro que $\overline{e}_1(u_0, v_0)\cos\theta + \overline{e}_2(u_0, v_0)\sin\theta$. □

2.12 Direcciones principales. Líneas de curvatura.

Definición 2.22. *Se denominan direcciones principales aquellas en que la curvatura normal es máxima o mínima. Los valores que alcanza la curvatura en esas direcciones se denominan curvaturas principales.*

Proposición 2.17. *Las direcciones en que la curvatura normal es máxima y mínima se obtienen de resolver la ecuación de segundo grado en λ*

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 & -\lambda & 1 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0.$$

DEM. Partiendo de la ecuación

$$\kappa_n = \frac{e + 2f\lambda + g\lambda^2}{E + 2F\lambda + G\lambda^2}. \tag{40}$$

Derivamos respecto de λ y resulta

$$(E + 2F\lambda + G\lambda^2)[2f + 2g\lambda] - (e + 2f\lambda + g\lambda^2)[2F + 2G\lambda] = 0.$$

De donde

$$\frac{f + g\lambda}{F + G\lambda} = \frac{e + 2f\lambda + g\lambda^2}{E + 2F\lambda + G\lambda^2}. \tag{41}$$

Por otro lado es obvio que

$$\begin{aligned} e + 2f\lambda + g\lambda^2 &= (e + f\lambda) + \lambda(f + g\lambda) \\ E + 2F\lambda + G\lambda^2 &= (E + F\lambda) + \lambda(F + G\lambda), \end{aligned}$$

luego podemos reescribir (40) como

$$\kappa_n(\lambda) = \frac{(e + f\lambda) + \lambda(f + g\lambda)}{(E + F\lambda) + \lambda(F + G\lambda)}.$$

Llamando

$$\begin{aligned} A &= e + 2f\lambda + g\lambda^2 \\ B &= E + 2F\lambda + G\lambda^2 \\ C &= f + g\lambda \\ D &= F + G\lambda. \end{aligned}$$

Resulta que a partir de (40) y (41) tenemos

$$\kappa_n = \frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{\lambda C}{\lambda D} = \frac{A - \lambda C}{B - \lambda D}.$$

Es decir

$$\kappa_n = \frac{f + g\lambda}{F + G\lambda} = \frac{e + f\lambda}{E + F\lambda}. \tag{42}$$

de donde

$$(e + f\lambda)(F + G\lambda) = (f + g\lambda)(E + F\lambda),$$

por tanto

$$eF + eG\lambda + fF\lambda + fG\lambda^2 = fE + fF\lambda + gE\lambda + gF\lambda^2,$$

que podemos escribir como

$$\lambda^2[gF - fG] + \lambda[gE - eG] + [fE - eF] = 0, \tag{43}$$

que finalmente se memoriza mejor igualando a cero el determinante

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 & -\lambda & 1 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0. \tag{44}$$

□

Observación 2.31. *Substituyendo en (42) los valores λ_1 y λ_2, calculados resolviendo la anterior ecuación de segundo grado, obtenemos las curvaturas normales máxima y mínima, κ_1 y κ_2. Para este cálculo sin embargo utilizaremos un método más cómodo en la siguiente sección.*

Definición 2.23. *Se denominan líneas de curvatura de una superficie a toda curva sobre la superficie tal que en cada punto su tangente tiene la dirección de una dirección principal.*

Teorema 2.1. *Las líneas de curvatura forman una red ortogonal.*

Dem. Para probarlo basta comprobar que satisfacen la ecuación probada[77] en la proposición 2.8

$$EC - 2FB + GA = 0.$$

Siendo E, G y F los coeficientes de la primera forma, y A, B y C los coeficientes de la ecuación diferencial que satisfacen las curvas a estudiar

$$Adu^2 + 2Bdudv + Cdv^2 = 0.$$

En este caso, a partir de (43), haciendo $\lambda = dv/du$, resulta

$$[gF - fG]\, dv^2 + [gE - eG]\, dudv + [fE - eF]\, du^2 = 0,$$

es decir

$$C = [gF - fG], \qquad 2B = [gE - eG], \qquad A = [fE - eF].$$

Evaluemos $GA - 2BF + CE$, tenemos

$$\begin{aligned} &[fE - eF]\, G - [gE - eG]\, F + [gF - fG]\, E = \\ &\qquad fEG - eFG - gEF + eGF + gFE - fGE = 0. \end{aligned}$$

Luego efectivamente las líneas de curvatura son ortogonales. □

Observación 2.32. *Consecuencia inmediata del anterior teorema es que conocida λ_1, la dirección λ_2 es obviamente perpendicular a ella, o viceversa. Luego basta con conocer una de ellas.*

---

[77] Esto es $\begin{matrix} A & B & C \\ & >|< & \\ E & F & G \end{matrix}$ una regla nemotécnica.

Ejemplo 2.18. *Dado el hiperboloide de una hoja*

$$\overline{x}(t,w) = [\cos(t) - w\,\mathrm{sen}(t), \mathrm{sen}(t) + w\cos(t), w],$$

y el punto $[2,-1,2]$ *correspondiente a los valores* $t = 3\pi/2$ *y* $w = 2$*. Se pide:*

i) Calcular en dicho punto las direcciones principales y las asintóticas así como los vectores tridimensionales asociados con ellas.

ii) Dada la curva $w = 2 - \cos(t)$ *sobre la superficie, que pasa por el punto* $[2,-1,2]$*, para* $t = 3\pi/2$*. Se pide calcular la curvatura normal en la dirección de su tangente en dicho punto.*

Solución.

i) En primer lugar tenemos que

$$\overline{x}'_t = [-\mathrm{sen}(t) - w\cos(t), \cos(t) - w\,\mathrm{sen}(t), 0], \qquad \overline{x}'_w = [-\mathrm{sen}(t), \cos(t), 1],$$

y

$$\overline{N} = [\frac{\cos(t) - w\,\mathrm{sen}(t)}{\sqrt{1+2w^2}}, \frac{\mathrm{sen}(t) + w\cos(t)}{\sqrt{1+2w^2}}, \frac{-w}{\sqrt{1+2w^2}}].$$

Resulta inmediato que en $t = 3\pi/2$ y $w = 2$, se tiene que $\overline{x}'_t(3\pi/2, 2) = [1,2,0]$ y $\overline{x}'_w(3\pi/2, 2) = [1,0,1]$, mientras que $\overline{N}(3\pi/2, 2) = [2/3, -1/3, -2/3]$.

Asimismo, en el punto, $E = 5$, $F = 1$ y $G = 2$; por otro lado $e = -5/3$, $f = -1/3$ y $g = 0$. Las direcciones principales se obtienen resolviendo

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 & -\lambda & 1 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; \begin{vmatrix} \lambda^2 & -\lambda & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ -5/3 & -1/3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{2}{3}\lambda^2 + \frac{10}{3}\lambda = 0.$$

Obtenemos $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -5$, que nos conducen a los vectores

$$\begin{aligned} \overline{w}_1 &= [1,2,0] + 0\cdot[1,0,1] = [1,2,0], \\ \overline{w}_2 &= [1,2,0] + (-5)\cdot[1,0,1] = [-4,2,-5]. \end{aligned}$$

De modo análogo a partir de

$$e\mu^2 + 2f\mu + g = 0 \;\Rightarrow\; -\frac{5}{3}\mu^2 - \frac{2}{3}\mu = 0,$$

obtenemos $\mu_1 = 0$ y $\mu_2 = -2/5$, que nos llevan a los vectores

$$\begin{aligned} \overline{a}_1 &= 0\cdot[1,2,0] + [1,0,1] = [1,0,1], \\ \overline{a}_2 &= \frac{-2}{5}\cdot[1,2,0] + [1,0,1] = [\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}, 1]. \end{aligned}$$

ii) Resulta inmediato que la curva tras substituir en $w = 2 - \cos(t)$ en la superficie nos da

$$\overline{y}(t) = [\cos(t) - (2-\cos(t))\,\mathrm{sen}(t), \mathrm{sen}(t) + (2-\cos(t))\cos(t), 2 - \cos(t)].$$

En $t = 3\pi/2$, tenemos el punto $[2, -1, 2]$ y pasa por el punto donde tenemos la primera y la segunda forma calculada. Su derivada es

$$\overline{y}'(t) = [-\operatorname{sen}(t) - \operatorname{sen}(t)^2 - (2 - \cos(t))\cos(t),$$
$$\cos(t) + \cos(t)\operatorname{sen}(t) - (2 - \cos(t))\operatorname{sen}(t), \operatorname{sen}(t)]$$

La derivada particularizada en $t = 3\pi/2$, nos proporciona el vector $[0, 2, -1]$ (que no es preciso normalizar). Ahora debemos proceder en forma recíproca a como lo hicimos más arriba, a partir de este vector que sabemos situado sobre el plano tangente, debemos obtener su "dirección". Para calcular la dirección, planteamos el sistema vectorial

$$[0, 2, -1] = \overline{x}'_t(\frac{3\pi}{2}, 2)\, n_1 + \overline{x}'_w(\frac{3\pi}{2}, 2)\, n_2,$$

donde las incógnitas son n_1 y n_2. Como $\overline{x}'_t(\frac{3\pi}{2}, 2) = [1, 2, 0]$ y $\overline{x}'_w(\frac{3\pi}{2}, 2) = [1, 0, 1]$, obtenemos resolviendo el sistema $n_1 = 1$ y $n_2 = -1$. Luego la dirección buscada es $\lambda = n_2/n_1 = -1$, substituyendo λ en la expresión de κ_n, particularizados los coeficientes de la I y II forma en el punto, y obtenemos la curvatura normal en dicha dirección

$$\kappa_n = \frac{e + 2f\lambda + g\lambda^2}{E + 2F\lambda + G\lambda^2} = \frac{\frac{-5}{3} + 2 \cdot \frac{-1}{3} \cdot (-1) + 0 \cdot (-1)^2}{5 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 2(-1)^2} = \frac{-1}{5}.$$

$\square$

Definición 2.24. *Se denominan puntos cíclicos o umbílicos*[78] *aquellos puntos en los cuales la primera y segunda forma son proporcionales entre si. Luego $\kappa_1 = \kappa_2$, lo que significa que las curvaturas de todas las secciones normales que pasan por dicho punto coinciden. Por consiguiente todas las direcciones que pasan por el son principales. Si además $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$, diremos que se trata de un punto planar.*

Ejemplo 2.19. *Evidentemente todos los puntos de una esfera son puntos umbílicos. La superficie $\overline{x}(u, v) = [u\cos v, u\sin v, 1 - e^{-1/u^2}]$, tiene un punto planar en $[0, 0, 1]$.*

Ejercicio 2.4. Calcular los dos puntos umbílicos de $\overline{x}[u, v] = [u, v, \frac{u^2}{2p} + \frac{v^2}{2q}]$, con $p > q > 0$ ¿que ocurre si $p = q$?

2.13 Curvaturas principales. Curvatura media y curvatura de Gauss

Teorema 2.2. *Las curvaturas principales se obtienen resolviendo la ecuación de segundo grado en κ_n*

$$\begin{vmatrix} E\kappa_n - e & F\kappa_n - f \\ F\kappa_n - f & G\kappa_n - g \end{vmatrix} = 0.$$

Dem. Hemos visto que una vez obtenidas las direcciones principales en (44) se substituye en

$$\kappa_n = \frac{f + g\lambda}{F + G\lambda} = \frac{e + f\lambda}{E + F\lambda}.$$

[78]Se calculan formando los "vectores" (E, F, G) y (e, f, g), y luego resolviendo $(E, F, G) \times (e, f, g) = 0$, o bien $M^2 = K$.

Tenemos

$$\begin{aligned}(E+F\lambda)\kappa_n &= e+f\lambda\\(F+G\lambda)\kappa_n &= f+g\lambda\end{aligned}$$

pasando todo a la derecha y sacando λ factor común

$$\begin{aligned}(e-\kappa_n E)+(f-\kappa_n F)\lambda &= 0\\(f-\kappa_n F)+(g-\kappa_n G)\lambda &= 0.\end{aligned}$$

Como $\lambda = dv/du$, κ_n satisface las ecuaciones

$$(e-\kappa_n E)du+(f-\kappa_n F)dv = 0 \tag{45}$$

$$(f-\kappa_n F)du+(g-\kappa_n G)dv = 0. \tag{46}$$

Estas ecuaciones forman un sistema lineal homogéneo en du, dv, para que puedan tener solución distinta de la trivial se tiene que cumplir que su determinante sea igual a cero, es decir

$$\begin{vmatrix} E\kappa_n - e & F\kappa_n - f\\ F\kappa_n - f & G\kappa_n - g\end{vmatrix} = 0. \tag{47}$$

□

Corolario 2.9. *Si κ_1 y κ_2 son las curvaturas principales, se cumple entonces que*

$$\begin{aligned}\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2} &= \frac{Eg-2fF+eG}{2(EG-F^2)}\\ \kappa_1\kappa_2 &= \frac{eg-f^2}{EG-F^2}.\end{aligned}$$

Dem. Operando en (47) tenemos

$$(E\kappa_n - e)(G\kappa_n - g) - (F\kappa_n - f)^2 = 0,$$

y operando resulta

$$EG\kappa_n^2 + eg - \kappa_n(Eg+eG) - F^2\kappa_n^2 + 2fF\kappa_n - f^2 = 0,$$

agrupando los coeficientes de la ecuación de segundo grado en κ_n queda

$$[EG-F^2]\,\kappa_n^2 + [2fF - Eg - eG]\,\kappa_n + [eg-f^2] = 0.$$

Utilizando las fórmulas de Vieta son inmediatas las fórmulas del enunciado. □

Observación 2.33. *Nótese que si llamamos (g_{ij}) a la matriz de la primera forma cuadrática y (h_{ij}) a la matriz de la segunda. Tenemos que $K = \det(g)/\det(h)$.*

Definición 2.25. *Al valor $M = \dfrac{\kappa_1+\kappa_2}{2}$ se le denomina curvatura media y a $K = \kappa_1\kappa_2$ curvatura de Gauss o curvatura total.*

Observación 2.34. *Dada la expresión de la curvatura de Gauss, es claro que se cumple*

i) *Si* $K > 0$ *el punto es elíptico.*

ii) *Si* $K = 0$ *es parabólico.*

iii) *Si* $K < 0$ *es hiperbólico.*

Corolario 2.10. *Si* κ_1 *y* κ_2 *son las curvaturas principales,* M *la curvatura media y* K *la curvatura de Gauss, entonces se cumple que*

$$\kappa_i = M \pm \sqrt{M^2 - K}.$$

Ejemplo 2.20. *Consideremos un toro donde* $R > r$*, es trivial comprobar que en cualquier punto de la circunferencia exterior de radio* $r + R$*, la curvatura gaussiana vale* $K = [(R + r)r]^{-1}$*, mientras que en cualquier punto de la circunferencia interior, es decir, de radio* $R - r$*, vale* $K = -[(R - r)r]^{-1}$*.*

Ejercicio 2.5. Verificar que para una esfera de radio $r = 1$, la curvatura gaussiana que vale $K = 1/r^2$, es obviamente $K = 1$; pero para la superficie de revolución obtenida al girar la curva $[\lambda(u), \mu(u)]$ –situada en OXZ– alrededor del eje OZ, con $\lambda(u) = a\,\mathrm{sen}(u)$ y $\mu(u) = \int_0^u \sqrt{1 - a^2\cos^2(t)}\,dt$, la curvatura gaussiana también vale $K = 1$, para cualquier $0 < a \leq 1$.

Ejercicio 2.6. Probar que una superficie reglada no tiene puntos elipticos, o lo que es equivalente demostrar que para una superficie reglada $K(u, v) \leq 0$.

Observación 2.35. *La curvatura de Gauss es importante en el contexto de las geometría riemanniana (espacios que en lo infinitamente pequeño coinciden con el euclidiano).*

El concepto de curvatura de un espacio de Riemann generaliza a n *dimensiones el de curvatura gaussiana de una superficie. El concepto de curvatura de un espacio (de una superficie en nuestro caso) no está relacionado en absoluto con la idea de que el espacio esté sumergido en un espacio superior envolvente en el cual tenga de algún modo una cierta curvatura, aun cuando* κ_1 *y* κ_2 *si tengan ese carácter,* K *es una propiedad intrínseca de la superficie. Justamente la demostración de ese hecho es un notable resultado conocido como Teorema Egregium de Gauss, y que será el último resultado que probaremos, ver páginas 83 a 119.*

La curvatura gaussiana podría ser calculada por los habitantes de la superficie utilizando solo medidas sobre la superficie (coeficientes de la primera forma y sus derivadas), sin referencia ninguna al espacio circundante y mide, en el entorno del punto de que se trate, la diferencia entre la superficie dada y el plano euclídeo.

Proposición 2.18. *Sea la curva* $\overline{h}(u) = [\lambda(u), \mu(u)]$ *en el plano OXZ, consideramos la superficie de revolución engendrada alrededor del eje OZ*

$$\overline{x}(u, v) = [\lambda(u)\cos v, \lambda(u)\,\mathrm{sen}\, v, \mu(u)], \qquad u \in (-r, r) \ \wedge v \in (0, 2\pi).$$

entonces se cumple[79] *que* $F = f = 0$*, además*

$$K = \frac{\mu'(u)}{\lambda(u)} \left(\frac{\mu''(u)\lambda'(u) - \lambda''(u)\mu'(u)}{([\mu'(u)]^2 + [\lambda'(u)]^2)^2} \right).$$

[79] Si el perfil $[\mu(u), \lambda(u)]$ estuviera parametrizada respecto del arco, i.e. $u = s$, $\sqrt{[\mu'(u)]^2 + [\lambda'(u)]^2} = 1$, se cumpliría $K = -\lambda(u)''/\lambda(u)$. No olvidemos tampoco que una superficie de revolución puede no venir parametrizada como de revolución y entonces no se cumple $F = f = 0$.

DEM. Calculemos en primer lugar E, F y G. Tendremos

$$\begin{aligned}
\overline{x}'_u &= [\lambda'(u)\cos v, \lambda'(u)\operatorname{sen} v, \mu'(u)] \\
\overline{x}'_v &= [-\lambda(u)\operatorname{sen} v, \lambda(u)\cos v, 0].
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
E &= \langle \overline{x}'_u, \overline{x}'_u \rangle = \lambda'(u)^2\cos^2 v + \lambda'(u)^2\operatorname{sen}^2 v + \mu'(u)^2 = \lambda'(u)^2 + \mu'(u)^2, \\
F &= \langle \overline{x}'_u, \overline{x}'_v \rangle = 0, \\
G &= \langle \overline{x}'_v, \overline{x}'_v \rangle = \lambda(u)^2\operatorname{sen}^2 v + \lambda(u)^2\cos^2 v = \lambda(u)^2.
\end{aligned}$$

De donde

$$EG - F^2 = \lambda(u)^2[\lambda'(u)^2 + \mu'(u)^2].$$

Calculemos ahora la segunda forma cuadrática, calculemos $\overline{x}''_{uu}$, $\overline{x}''_{uu}$ y $\overline{N}$. Tendremos

$$\begin{aligned}
\overline{x}''_{uu} &= [\lambda''(u)\cos v, \lambda''(u)\operatorname{sen} v, \mu''(u)], \\
\overline{x}''_{uv} &= [-\lambda'(u)\sin(v), \lambda'(u)\cos v, 0], \\
\overline{x}''_{vv} &= [-\lambda(u)\cos(v), -\lambda(u)\operatorname{sen} v, 0].
\end{aligned}$$

Por otro lado es claro que

$$\begin{aligned}
\overline{N} = \frac{\overline{x}'_u \times \overline{x}'_v}{|\overline{x}'_u \times \overline{x}'_v|} &= \frac{\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \lambda'(u)\cos v & \lambda'(u)\operatorname{sen} v & \mu'(u) \\ -\lambda(u)\operatorname{sen} v & \lambda(u)\cos v & 0 \end{vmatrix}}{|\overline{x}'_u \times \overline{x}'_v|} \\
&= \frac{[-\mu'(u)\lambda(u)\cos v, -\mu'(u)\lambda(u)\operatorname{sen} v, \lambda'(u)\lambda(u)]}{|\overline{x}'_u \times \overline{x}'_v|}
\end{aligned}$$

Asimismo

$$|\overline{x}'_u \times \overline{x}'_v| = \sqrt{[\mu'(u)\lambda(u)]^2 + [\lambda(u)\lambda'(u)]^2} = \lambda(u)\sqrt{[\mu'(u)]^2 + [\lambda'(u)]^2}.$$

Calculemos los valores e, f y g.

$$\begin{aligned}
e &= \langle \overline{x}''_{uu}, \overline{N} \rangle = \frac{\mu''(u)\lambda'(u) - \lambda''(u)\mu'(u))}{\sqrt{[\mu'(u)]^2 + [\lambda'(u)]^2}} \\
f &= \langle \overline{x}''_{uv}, \overline{N} \rangle = 0 \\
g &= \langle \overline{x}''_{vv}, \overline{N} \rangle = \frac{\lambda(u)\mu'(u)}{\sqrt{[\mu'(u)]^2 + [\lambda'(u)]^2}}.
\end{aligned}$$

De donde el determinante de la segunda forma será

$$eg - f^2 = \lambda(u)\mu'(u)\frac{\mu''(u)\lambda'(u) - \lambda''(u)\mu'(u)}{[\mu'(u)]^2 + [\lambda'(u)]^2},$$

y dividiendo por el determinante de la primera tendremos

$$K = \frac{\mu'(u)}{\lambda(u)}\left(\frac{\mu''(u)\lambda'(u) - \lambda''(u)\mu'(u)}{([\mu'(u)]^2 + [\lambda'(u)]^2)^2}\right).$$

$\square$

Ejemplo 2.21. *Consideremos el paraboloide , engendrado al girar en torno al eje OZ por la curva $[u, u^2]$ situada en el plano OXZ, la superficie será*

$$\overline{x}(u, v) = [u \cos v, u \operatorname{sen} v, u^2].$$

Tendremos $\lambda(u) = u$ y $\mu(u) = u^2$, por tanto $\lambda'(u) = 1$, $\lambda'' = 0$, $\mu'(u) = 2u$ y $\mu''(u) = 2$. Por tanto

$$K = \frac{2u}{u} \frac{2}{(1 + 4u^2)^2} = \frac{4}{(1 + 4u^2)^2}.$$

Ejercicio 2.7. Dado el toro $\overline{x}(u, v) = [(r \cos(u) + R) \cos v, (r \cos(u) + R) \operatorname{sen}(v), r \operatorname{sen}(u)]$, utilizando la fórmula de la proposición 2.18 probar que

$$K = \frac{\cos u}{r(R + r \cos u)}.$$

Ejercicio 2.8. Se considera la superficie de revolución llamada pseudoesfera

$$\overline{x}(u, v) = [a \operatorname{sen} u \cos v, a \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, a \left(\cos u + \ln \left(\tan \frac{u}{2}\right)\right)],$$

con $u \in (0, \pi/2)$. Probar que $K = -1/a^2$ en todo punto.

2.14 Líneas de curvatura y curvas coordenadas

Teorema 2.3. *La condición necesaria y suficiente para que las líneas de curvatura sean curvas coordenadas o paramétricas es que*

$$f = F = 0.$$

Dem. Sabemos que las direcciones principales son aquellas que verifican

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 & -\lambda & 1 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0,$$

Si hacemos $\lambda = dv/du$ el anterior determinante queda

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0. \tag{48}$$

Supongamos que las líneas de curvatura coinciden con las coordenadas. Si tomamos una curva coordenada $u =$ cte., es claro que $du = 0$, y como se tiene que seguir cumpliendo (48) resultará

$$\begin{vmatrix} dv^2 & 0 & 0 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0 \implies \begin{vmatrix} F & G \\ f & g \end{vmatrix} = 0.$$

Por otro lado si hacemos $v =$ cte.$'$, tenemos que $dv = 0$ y como tiene que verificarse (48) tendremos

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & du^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0 \implies \begin{vmatrix} E & F \\ e & f \end{vmatrix} = 0.$$

Además como las líneas coordenadas son de curvatura, y las de curvatura forman un sistema ortogonal, resultará que $F = 0$. Substituyendo en los anteriores determinantes tenemos que $Ef = 0$ y $Gf = 0$. Sabemos que la primera forma es definida positiva; es decir $EG - F^2 > 0$, como $F = 0$ no pueden ser nulos E y G a la vez, luego necesariamente $f = 0$.

Recíprocamente si $F = f = 0$, y consideremos las direcciones de las líneas de curvatura que vienen dadas por

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & 0 & G \\ e & 0 & g \end{vmatrix} = 0 \implies du\,dv(Eg - Ge) = 0.$$

Luego, o bien $dudv = 0$, o bien $Eg - Ge = 0$. En el primer caso si $du = 0$ las líneas de curvatura verificarían $u = $ cte., por otro lado si suponemos $dv = 0$, tendremos $v = $ cte$'$., luego en ambas situaciones las líneas de curvatura serían también curvas paramétricas. En el segundo caso $Eg - Ge = 0$. Pero si esto último ocurre se cumple que $e/E = g/G$, substituyendo $e = Eg/G$ en la expresión[80] de la curvatura resulta, dado que $F = f = 0$, que

$$\kappa_2 = \frac{\dfrac{Eg}{G} + g\lambda^2}{E + G\lambda^2} = \frac{g}{G}\ \frac{E + G\lambda^2}{E + G\lambda^2} = \frac{g}{G}$$

Análogamente $\kappa_1 = e/E$, tras hacer $g = Ge/E$. Como $\kappa_2 = g/G = e/E = \kappa_1$, en todas las direcciones es constante y el punto sería umbílico. En cualquier dirección aparecerían líneas de curvatura, en concreto en la dirección de las curvas paramétricas. $\square$

Observación 2.36. *Sea una superficie de revolución*[81] $\overline{x}(u, v) = [u \operatorname{sen} v, u \cos v, h(u)]$. *Por la proposición 2.18, al ser $\lambda(u) = u$ y $\mu(u) = h(u)$, resultará que $f = F = 0$. O lo que es lo mismo una condición necesaria (aunque no suficiente) para que una superficie sea de revolución es que $f = F = 0$.*

Corolario 2.11. *Si líneas de curvatura son curvas coordenadas entonces*

$$\kappa_1 = \frac{e}{E}, \qquad \kappa_2 = \frac{g}{G}.$$

Dem. A través de la proposición anterior, se cumple que $F = f = 0$ en

$$\begin{vmatrix} E\kappa_n - e & F\kappa_n - f \\ F\kappa_n - f & G\kappa_n - g \end{vmatrix} = 0.$$

Resulta el producto

$$(E\kappa_n - e)(G\kappa_n - g) = 0.$$

[80]Una aparente contradicción surge si utilizamos $\kappa_i = \frac{e+\lambda f}{E+\lambda F} = \frac{f+\lambda g}{F+\lambda G}$, ó $\kappa_i = \frac{e+\mu f}{E+\mu F} = \frac{\mu e+f}{\mu E+F}$. Si hacemos $F = f = 0$, queda $\kappa_1 = e/E = (\lambda g)/(\lambda G) = g/G = \kappa_2$, luego siempre se cumpliría que $\kappa_1 = \kappa_2$, lo que es absurdo. El problema es que por coincidir paramétricas con curvatura uno de los dos λ es tal que $\lambda = 0$. La cancelación solo tiene sentido para el λ no nulo (es decir $\lambda = \infty$, equivalente a $\mu = 0$ en la expresión análoga en μ). Deduciríamos meramente que $\kappa_2 = g/G$ y razonando sobre la expresión en μ, para $\mu = \infty$ tendríamos $\kappa_1 = e/E$; y utilizando el que $Ge = gE$ llegaríamos al mismo resultado al obtenido arriba.

[81]Nótese que una superficie puede ser de revolución y no venir parametrizada como superficie de revolución. Piénsese en el hiperboloide de una hoja de revolución pero parametrizado como reglada. Obviamente $F \neq 0$.

Supongamos que por ejemplo es $\kappa_1 = e/E$, como

$$\kappa_n = \frac{edu^2 + gdv^2}{Edu^2 + Gdv^2},$$

escogiendo $v =$ cte., tenemos que $\kappa_n = e/E = \kappa_1$ y estamos en la dirección $\lambda = \lambda_1$. Sabemos que la otra dirección principal forma un ángulo recto con λ_1, y necesariamente, $F = 0$, corresponderá a $u =$ cte$'$., por lo que $\kappa_2 = g/G$. Si suponemos que $\kappa_2 = g/G$, llegaremos por el mismo procedimiento a que $\kappa_1 = e/E$. Es decir partiendo de una relación llegamos a la otra, sea cual sea aquella de la que partimos. Luego

$$\kappa_1 = \frac{e}{E}, \qquad \text{y} \qquad \kappa_2 = \frac{g}{G}.$$

También podríamos haber utilizado las relaciones obtenidas en la observación 2.28. □

Observación 2.37. *Resumamos las características esenciales (ver pág. 113 [14]) de las curvas sobre una superficie en relación con los coeficientes de la primera y segunda forma:*

Curvas	E	F	G	e	f	g
Ortogonales		0				
Curvatura		0			0	
Conjugadas					0	
Isótropas	0		0			
Asintóticas				0		0

Curvas isótropas son aquellas que en todos sus puntos cumplen $ds^2 = 0$.

2.15 Caracterización de las superficies desarrollables, de las líneas de curvatura y de las curvas asintóticas

Lema 2.1. *Dada una familia uniparamétrica de planos, que ni son paralelos, ni tienen una recta común (no forman un haz); entonces la envolvente de esa familia de planos o es un cilindro, o un cono, o una desarrollable tangencial.*

Dem. Ver pags. 76-78 de [14], o la observación 2.24 de la página 50 de estos mismos apuntes. □

Lema 2.2. *Sean* $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ *y* $\overline{d}$ *vectores de* $\mathbb{R}^3$, *entonces se cumple*

$$\langle \overline{a} \times \overline{b}, \overline{c} \times \overline{d} \rangle = \begin{vmatrix} \langle \overline{a}, \overline{c} \rangle & \langle \overline{a}, \overline{d} \rangle \\ \langle \overline{b}, \overline{c} \rangle & \langle \overline{b}, \overline{d} \rangle \end{vmatrix}.$$

Dem. Basta con considerar las componentes[82] de los cuatro vectores y operar. □

Teorema 2.4. *Una condición necesaria y suficiente para que una superficie reglada sea desarrollable es que la curvatura de Gauss sea nula en todo punto.*

[82] No sería difícil generalizar esta fórmula para $\langle \overline{v}_1 \times \overline{v}_2 \times \overline{v}_3, \overline{u}_1 \times \overline{u}_2 \times \overline{u}_3 \rangle$. De hecho puede utilizarse para calcular la norma del vector $\overline{N}$ a una hipersuperficie en $\mathbb{R}^4$.

Dem. Vamos a ver en primer lugar que si es desarrollable entonces $eg - f^2 = 0$.

No es difícil probar[83] que toda superficie reglada desarrollable o es una superficie desarrollable tangencial, o es un cono, o es un cilindro.

Supongamos que tenemos una desarrollable tangencial de ecuación $\overline{y}(s,v) = \overline{x}(s) + v\overline{t}(s)$. Derivando tenemos

$$\overline{y}'_s = \overline{x}'_s + v\,\overline{t}'_s = \overline{t}(s) + v\,\kappa(s)\,\overline{n}(s), \qquad \overline{y}'_v = \overline{t}(s).$$

Volviendo a derivar resulta

$$\overline{y}''_{ss} = \kappa\,\overline{n} + v(\kappa\,\overline{n})', \qquad \overline{y}''_{sv} = \kappa\,\overline{n}, \qquad \overline{y}''_{vv} = 0.$$

Resulta inmediato que

$$E = \langle \overline{y}'_s, \overline{y}'_s \rangle = 1 + v^2\kappa^2, \quad F = \langle \overline{y}'_s, \overline{y}'_v \rangle = 1, \quad G = \langle \overline{y}'_v, \overline{y}'_v \rangle = 1.$$

Por otro lado

$$\overline{N} = \frac{\overline{y}'_s \times \overline{y}'_v}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{v\,\kappa\,\overline{b}}{\sqrt{v^2\kappa^2}} = \overline{b}.$$

De donde finalmente

$$e = \langle \overline{y}''_{ss}, \overline{N} \rangle = \square, \quad f = \langle \overline{y}''_{sv}, \overline{N} \rangle = 0, \quad g = \langle \overline{y}''_{vv}, \overline{N} \rangle = 0,$$

y por tanto $eg - f^2 = 0$.

Si la curva es un cono generalizado de ecuación $\overline{y}(s,v) = \overline{a} + v\overline{x}(s)$, o un cilindro de ecuación $\overline{y}(s,v) = \overline{x}(s) + v\overline{a}$, (donde en principio $\overline{x}(s)$ suele ser una curva con la tercera componente nula) un sencillo cálculo nos muestra que efectivamente $eg - f^2 = 0$.

Recíprocamente supongamos que $eg - f^2 = 0$ podemos expresar utilizando la identidad de Lagrange

$$\begin{aligned} eg - f^2 &= \langle \overline{x}'_u, \overline{N}'_u \rangle \langle \overline{x}'_v, \overline{N}'_v \rangle - \langle \overline{x}'_u, \overline{N}'_v \rangle \langle \overline{x}'_v, \overline{N}'_u \rangle \\ &= \langle \overline{x}'_u \times \overline{x}'_v, \overline{N}'_u \times \overline{N}'_v \rangle = (\overline{N}, \overline{N}'_u, \overline{N}'_v)\,\sqrt{EG - F^2}, \end{aligned}$$

por lo que $eg - f^2 = 0$ coincide idénticamente con $(\overline{N}, \overline{N}'_u, \overline{N}'_v) = \langle \overline{N}, \overline{N}'_u \times \overline{N}'_v \rangle = 0$. Esto sucede en los siguientes casos:

i) $\overline{N}'_u$ o $\overline{N}'_v$ se anulan.

[83] Por la propia definición de superficie desarrollable a cada punto de la curva directriz se le puede asociar un único plano, el plano tangente a la superficie. Luego tenemos una familia uniparamétrica de planos. Que podemos escribir mediante la ecuación $\langle \overline{x}, \overline{a}(u) \rangle + b(u) = 0$, donde $\overline{x}$ es un punto genérico del plano $\overline{a}(u)$ es el vector normal del plano y $b(u)$ la distancia del origen al plano. Por otro lado recordemos la observación 2.24 de la página 50. Dos planos de una familia uniparamétrica infinitamente próximos, se cortan según la *recta característica*, y tres infinitamente próximos en el *punto característico*. El lugar geométrico de los puntos característicos es la *arista de retroceso*. La recta característica es tangente a dicha arista y es la recta que genera la envolvente a todos los planos. Si las rectas características son paralelas tenemos un cilindro, si tienen un punto común (el punto característico) un cono, en otro caso una desarrollable tangencial (para más detalle ver pags. 76-78 de [14]) Podemos, por tanto, asumir el siguiente resultado: *Una familia no numerable de planos, no todos paralelos ni pasando por una misma recta, tiene como envolvente un cilindro, un cono, o una desarrollable tangencial. Esta envolvente está engendrada por las rectas características de los planos. En el caso de un cono pasan todos por el único punto característico, y en el de una desarrollable tangencial son todas tangentes al lugar geométrico de los puntos característicos, es decir, a la arista de retroceso.*

ii) $\overline{N}'_u$ y $\overline{N}'_v$ son paralelos.

En el caso i) $\overline{N}$ depende de un solo parámetro. Eso hay que interpretarlo, de acuerdo con el lema (2.1), como que la superficie es la envolvente de una familia uniparamétrica de planos, y que por tanto se trata de una superficie desarrollable.

En el caso ii) escogeremos como sistema de curvas coordenadas las líneas de curvatura sobre la superficie, por lo que se cumple $F = f = 0$. Al partir de $eg - f^2 = eg = 0$, tendremos que o bien $e = \langle \overline{x}'_u, \overline{N}'_u \rangle = 0$, o bien $g = \langle \overline{x}'_v, \overline{N}'_v \rangle = 0$.

Supongamos que $e = 0$. Como $\langle \overline{x}'_u, \overline{N}'_u \rangle = 0$, por el paralelismo de $\overline{N}'_u$ y $\overline{N}'_v$ se cumplirá que $-f = \langle \overline{x}'_u, \overline{N}'_v \rangle = \langle \overline{x}'_v, \overline{N}'_u \rangle = 0$. Sabemos que $\langle \overline{N}, \overline{N} \rangle = 1$, derivando respecto de u tenemos que $\langle \overline{N}'_u, \overline{N} \rangle = 0$, es decir $\overline{N}'_u \perp \overline{N}$, luego $\overline{N}'_u$ está en el plano tangente. Pero al cumplirse simultáneamente $\langle \overline{x}'_u, \overline{N}'_u \rangle = 0$ y $\langle \overline{x}'_v, \overline{N}'_u \rangle = 0$, resultará que $\overline{N}'_u = 0$, lo que nos lleva al caso i).

Supongamos ahora que $g = 0$, razonaremos de idéntica manera, pero ahora partiendo de $\langle \overline{x}'_v, \overline{N}'_v \rangle = 0$, el paralelismo nos lleva a a que $\langle \overline{x}'_v, \overline{N}'_u \rangle = 0$, de donde por ser $f = 0$ tenemos que $\langle \overline{x}'_u, \overline{N}'_v \rangle = 0$, y finalmente derivando $\langle \overline{N}, \overline{N} \rangle = 1$ respecto de v, llegamos a que $\langle \overline{N}, \overline{N}'_v \rangle = 0$, luego $\overline{N}'_v$ está en el plano tangente, y de idéntica forma por cumplirse $\langle \overline{x}'_v, \overline{N}'_v \rangle = 0$ y $\langle \overline{x}'_u, \overline{N}'_v \rangle = 0$, resulta $\overline{N}'_v = 0$, con lo que volvemos a pasar al caso i). □

Ejercicio 2.9. Probar que se cumple $\overline{N}'_u \times \overline{N}'_v = K\ (\overline{x}'_u \times \overline{x}'_v)$.

Proposición 2.19. *(pág. 217 de [14])*

Dada una superficie reglada no cilíndrica tal que $\overline{x}(u,v) = \overline{\alpha}(u) + v\, \overline{w}(u)$ *, con* $\|\overline{w}\| = 1$*, entonces se cumplen*

$$i)\quad \overline{N} = \frac{\overline{\alpha}' \times \overline{w} + v\, \overline{w}' \times \overline{w}}{\sqrt{EG - F^2}}. \qquad ii)\quad K = \frac{-f^2}{EG - F^2} = \frac{-(\overline{\alpha}', \overline{w}', \overline{w})^2}{(EG - F^2)^2}.$$

Dem. Es claro que $\langle \overline{w}, \overline{w} \rangle = 1$, y derivando respecto de u, resulta que $\langle \overline{w}, \overline{w}'_u \rangle = 0$. Los vectores coordenados son

$$\overline{x}'_u = \overline{\alpha}'_u + v\, \overline{w}'_u, \quad \overline{x}'_v = \overline{w}.$$

Por otro lado

$$\overline{x}''_{u^2} = \overline{\alpha}''_{u^2} + v\, \overline{w}''_{u^2}, \quad \overline{x}''_{uv} = \overline{w}'_u, \quad \overline{x}''_{v^2} = 0,$$

de donde

$$\begin{aligned} E &= \langle \overline{x}'_u, \overline{x}'_u \rangle = \square \\ F &= \langle \overline{x}'_u, \overline{x}'_v \rangle = \langle \overline{\alpha}'_u, \overline{w} \rangle + v \langle \overline{w}'_u, \overline{w} \rangle = \langle \overline{\alpha}'_u, \overline{w} \rangle, \\ G &= \langle \overline{x}'_v, \overline{x}'_v \rangle = \langle \overline{w}, \overline{w} \rangle = 1. \end{aligned}$$

El vector normal será

$$\begin{aligned} \overline{N} &= \frac{\overline{x}'_u \times \overline{x}'_v}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{(\overline{\alpha}'_u + v\, \overline{w}'_u) \times \overline{w}}{\sqrt{EG - F^2}} \\ &= \frac{\overline{\alpha}'_u \times \overline{w} + v\, \overline{w}'_u \times \overline{w}}{\sqrt{EG - F^2}}, \end{aligned}$$

luego hemos obtenido la primera fórmula del enunciado. En consecuencia los coeficientes de la segunda forma son

$$\begin{aligned}
e &= \langle \overline{x}''_{u^2}, \overline{N} \rangle = \square \\
f &= \langle \overline{x}''_{uv}, \overline{N} \rangle = \langle \frac{\overline{\alpha}'_u \times \overline{w} + v\, \overline{w}'_u \times \overline{w}}{\sqrt{EG - F^2}}, \overline{w}'_u \rangle = \frac{\langle \overline{\alpha}'_u \times \overline{w}, \overline{w}'_u \rangle + \langle v\, \overline{w}'_u \times \overline{w}, \overline{w}'_u \rangle}{\sqrt{EG - F^2}} \\
&= \frac{\langle \overline{\alpha}'_u \times \overline{w}, \overline{w}'_u \rangle}{\sqrt{EG - F^2}} \\
g &= \langle \overline{x}''_{v^2}, \overline{N} \rangle = 0.
\end{aligned}$$

De la expresión para la curvatura gaussiana y del valor de g, resulta inmediato que

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-f^2}{EG - F^2}.$$

Introducimos el parámetro $p(u)$, en la expresión

$$f = \frac{\langle \overline{\alpha}'_u \times \overline{w}, \overline{w}'_u \rangle}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{p(u)}{\sqrt{EG - F^2}},$$

elevando al cuadrado y substituyendo en la expresión de K, queda la segunda fórmula

$$K = \frac{-\langle \overline{\alpha}'_u \times \overline{w}, \overline{w}'_u \rangle^2}{(EG - F^2)^2} = \frac{-(\overline{\alpha}'_u, \overline{w}, \overline{w}'_u)^2}{(EG - F^2)^2} = \frac{-p(u)^2}{(EG - F^2)^2}.$$

$\square$

Definición 2.26. *Al escalar que nos da el producto mixto* $p(u) = (\overline{\alpha}'_u, \overline{w}, \overline{w}'_u)$*, se le denomina parámetro de distribución. Obviamente una condición necesaria y suficiente para que* $\overline{x}(u, v)$ *sea desarrollable es que* $p(u) = 0$.

Ejercicio 2.10. Sean $a(t)$, $b(t)$, $h(t)$ y $k(t)$ funciones derivables con $a'(t) \neq 0$ y $b'(t) \neq 0$, $\forall t \in (t_0, t_1)$. Dada la superficie reglada $\overline{x}(t, z) = [a(t)z + h(t), b(t)z + k(t), z]$. Se pide:

i) Calcular su línea de estricción en términos de $a(t)$, $b(t)$, $h(t)$ y $k(t)$ y sus derivadas.

ii) Dar condiciones sobre $a(t)$, $b(t)$, $h(t)$ y $k(t)$ para que sea desarrollable.

iii) Probar que cuando es desarrollable la arista de retroceso tiene de ecuación

$$\overline{\gamma}(t) = [h(t) - \frac{h'(t)}{a'(t)}\, a(t), k(t) - \frac{k'(t)}{b'(t)}\, b(t), -\frac{h'(t)}{a'(t)}], \quad \forall t \in (t_0, t_1).$$

Teorema 2.5. *(Ecuación diferencial de las líneas de curvatura)*

Dada una superficie $\overline{x}(u, v)$*, sean* E*,* F *y* G*, así como* e*,* f *y* g*, los coeficientes de la primera y segunda forma cuadrática. Entonces la ecuación diferencial de las líneas de curvatura viene dada por*

$$\begin{vmatrix} Edu + Fdv & Fdu + Gdv \\ edu + fdv & fdu + gdv \end{vmatrix} = 0.$$

DEM. Sabemos que si λ es una dirección principal se cumple

$$\frac{e+f\lambda}{E+F\lambda}=\frac{f+g\lambda}{F+G\lambda}.$$

Haciendo $\lambda = dv/du$ se tiene que cumplir tras operar que

$$(Edu+Fdv)(fdu+gdv)-(Fdu+Gdv)(edu+fdv)=0$$

que podemos expresar mediante el determinante del enunciado. □

Ejemplo 2.22. *Sea $a>0$ se considera el helicoide de ecuación*

$$\overline{x}(u,v)=[u\cos v, u\,\mathrm{sen}\,v, av].$$

Se pide determinar sus líneas de curvatura.

Resulta inmediato que este caso

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &\equiv du^2+(u^2+a^2)dv^2 \\ \mathrm{II} &\equiv \frac{-2adudv}{\sqrt{a^2+u^2}}. \end{aligned}$$

En consecuencia y como $F=e=g=0$ substituyendo en el determinante tenemos

$$\begin{vmatrix} Edu & Gdv \\ fdv & fdu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} du & (u^2+a^2)dv \\ \dfrac{-adv}{\sqrt{u^2+a^2}} & \dfrac{-adu}{\sqrt{u^2+a^2}} \end{vmatrix}.$$

O lo que es lo mismo resulta una integral inmediata[84] *que nos da*

$$(a^2+u^2)dv^2-du^2=0 \quad \Rightarrow \quad dv=\frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}}.$$

Luego, llamando $c'=\ln c$, tendremos

$$v=\pm\ln\left(\frac{u}{a}+\sqrt{\left(\frac{u}{a}\right)^2+1}\right)+c=\pm\ln\left[c'\left(\frac{u}{a}+\sqrt{\left(\frac{u}{a}\right)^2+1}\right)\right].$$

Proposición 2.20. *Condición necesaria y suficiente para que una curva sobre la superficie sea línea de curvatura es que las normales a la superficie a lo largo de dicha curva formen una superficie desarrollable.*

DEM. Dada una $\overline{x}(s)$, en principio arbitraria, sobre la superficie. La superficie reglada indicada es

$$\overline{y}(u,s)=\overline{x}(s)+u\,\overline{N}(s), \tag{49}$$

Obtenemos

$$\overline{y}'_s=\overline{t}+u\overline{N}'_s, \qquad \overline{y}'_u=\overline{N}(s), \qquad \overline{y}''_{su}=\overline{N}'_s, \qquad \overline{y}''_{uu}=0.$$

[84] Recordemos que $\arg\sinh(x/a)=\ln(\frac{x}{a}+\sqrt{1+(\frac{x}{a})^2})$.

La normal de la nueva superficie la notaremos como $\overline{\mathcal{N}}$, a diferencia de la $\overline{N}$ de la superficie dada. Veamos quien es $\overline{\mathcal{N}}$

$$\overline{\mathcal{N}} = \frac{\overline{y}'_s \times \overline{y}'_u}{|\overline{y}'_s \times \overline{y}'_u|} = \frac{(\bar{t} + u\overline{N}'_s) \times \overline{N}}{|\overline{y}'_s \times \overline{y}'_u|}.$$

Por ser $\overline{y}''_{uu} = 0$, resultará que $g = \langle \overline{y}''_{uu}, \overline{\mathcal{N}} \rangle = 0$. Analicemos el valor de f

$$\begin{aligned} f &= \langle \overline{y}''_{su}, \overline{\mathcal{N}} \rangle = \langle \overline{N}'_s, \frac{(\bar{t} + u\overline{N}'_s) \times \overline{N}}{\sqrt{EG - F^2}} \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \Big(\langle \overline{N}'_s, \bar{t} \times \overline{N} \rangle + u \, \langle \overline{N}'_s, \overline{N}'_s \times \overline{N} \rangle \Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \langle \overline{N}'_s, \bar{t} \times \overline{N} \rangle = \frac{\langle \bar{t}, \overline{N} \times \overline{N}'_s \rangle}{\sqrt{EG - F^2}}. \end{aligned}$$

Para que $f = 0$, y resulte $eg - f^2 = 0$, es decir sea desarrollable, o bien $\overline{N}'_s = 0$, o bien[85] $\bar{t} \parallel \overline{N}'_s$.

En el primer caso, es decir si $\overline{N}'_s = 0$, resulta $\overline{N} = \overline{\text{cte}}$. y se trata de un cilindro generalizado que como sabemos es una superficie desarrollable.

En el segundo caso tendremos que $\overline{N}'_s = \mu \bar{t}$, de donde multiplicando por ds resulta

$$\mu \, d\overline{x} - d\overline{N} = 0. \tag{50}$$

Veamos cuando ocurre esto y quien es μ. Sabemos que $d\overline{N} = \overline{N}'_u du + \overline{N}'_v dv$, y también que $d\overline{x} = \overline{x}'_u du + \overline{x}'_v dv$, por lo que tendremos

$$(\mu \overline{x}'_u - \overline{N}'_u) du + (\mu \overline{x}'_v - \overline{N}'_v) dv = 0. \tag{51}$$

Si ahora multiplicamos (51) escalarmente por $\overline{x}'_u$, y luego por $\overline{x}'_v$, obtenemos utilizando las definiciones de E, F, G, e, f y g, el par de ecuaciones

$$(\mu E + e) du + (\mu F + f) dv = 0, \tag{52}$$

$$(\mu F + f) du + (\mu G + g) dv = 0. \tag{53}$$

Todavía no hemos utilizado que $\overline{x}(s)$ es de curvatura. Este es el momento. Las ecuaciones (52) y (53), simplemente haciendo $\mu = -\kappa$ coinciden con (45) y (46) que son, entre otras, las ecuaciones que caracterizan a la líneas de curvatura. □

Corolario 2.12. *En una superficie de revolución los meridianos y los paralelos son líneas de curvatura*

Dem. Si movemos el vector normal a una superficie de revolución a lo largo de un paralelo, la superficie que engendra es obviamente un plano, o un cono, o un cilindro. Si el vector normal se mueve a lo largo de un meridiano siempre tenemos un plano. Luego en todos los casos los meridianos y paralelos son líneas de curvatura. □

Observación 2.38. *Asimismo si en una superficie de revolución consideramos una curva que no es meridiano ni paralelo podemos asegurar que la superficie reglada generada por la normal a la superficie no es desarrollable.*

[85] Recuérdese que si dos vectores del producto mixto son proporcionales el producto mixto es nulo.

Proposición 2.21. *(Fórmula de Olinde Rodrigues)*

Dada una superficie regular, sea $\overline{N}$ el vector normal y $d\overline{x}$ una dirección sobre la superficie. Las líneas de curvatura vienen caracterizadas mediante la ecuación[86] *diferencial,*

$$d\overline{N} + \kappa\, d\overline{x} = 0,$$

donde κ es la curvatura normal en la dirección $d\overline{x}$ de la líneas de curvatura.

Dem. Podemos utilizar la proposición anterior simplemente haciendo $\mu = -\kappa$ en (50) y quedaría demostrada.

De un modo más autocontenido: partimos de las ecuaciones que resultan de despejar en (42),

$$\kappa = \frac{e + \lambda f}{E + \lambda F} = \frac{f + \lambda g}{F + \lambda G},$$

y que quedan como

$$\begin{aligned} (E\kappa - e) + \lambda(F\kappa - f) &= 0, \\ (F\kappa - f) + \lambda(G\kappa - g) &= 0. \end{aligned}$$

Por ser $\lambda = dv/du$, podemos expresarlas como

$$\begin{aligned} (E\kappa - e)du + (F\kappa - f)dv &= 0, \\ (F\kappa - f)du + (G\kappa - g)dv &= 0. \end{aligned}$$

Reemplacemos E, F y G, así como e, f y g por sus valores, tendremos

$$\begin{aligned} (\langle \overline{x}'_u, \overline{x}'_u \rangle \kappa + \langle \overline{x}'_u, \overline{N}'_u \rangle)du + (\langle \overline{x}'_u, \overline{x}'_v \rangle \kappa + \langle \overline{x}'_u, \overline{N}'_v \rangle)dv &= 0, \\ (\langle \overline{x}'_v, \overline{x}'_u \rangle \kappa + \langle \overline{x}'_v, \overline{N}'_u \rangle)du + (\langle \overline{x}'_v, \overline{x}'_v \rangle \kappa + \langle \overline{x}'_v, \overline{N}'_v \rangle)dv &= 0, \end{aligned}$$

que podemos reescribir como

$$\begin{aligned} \langle \overline{x}'_u, (\overline{N}'_u du + \overline{N}'_v dv) \rangle + \langle \overline{x}'_u, \kappa(\overline{x}'_u du + \overline{x}'_v dv) \rangle &= 0, \\ \langle \overline{x}'_v, (\overline{N}'_u du + \overline{N}'_v dv) \rangle + \langle \overline{x}'_v, \kappa(\overline{x}'_u du + \overline{x}'_v dv) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Expresiones que podemos agrupar como

$$\langle \overline{x}'_u, d\overline{N} + \kappa d\overline{x} \rangle = 0, \tag{54}$$

$$\langle \overline{x}'_v, d\overline{N} + \kappa d\overline{x} \rangle = 0. \tag{55}$$

Sabemos que $d\overline{x}$ está en el plano tangente. Por estarlo también $\overline{N}'_u$ y $\overline{N}'_v$, resultará que $d\overline{N}$ también esta en el plano tangente. En consecuencia $d\overline{N} + \kappa d\overline{x}$ pertenece al plano tangente. Pero como los vectores $\overline{x}'_u$ y $\overline{x}'_v$ definen el plano tangente, la única posibilidad de que se cumplan (54) y (55), es que justamente se verifique que

$$d\overline{N} + \kappa\, d\overline{x} = 0.$$

No olvidemos el detalle de que solo se cumple si κ es una de las curvaturas principales.

Recíprocamente si se cumplen (54) y (55) podemos dar marcha hacia atrás y llegar a la relación que solo se satisfacen si λ es una dirección principal o, en otras palabras, si la curva es una línea de curvatura.

□

[86] Dividiendo por ds tendríamos una manera más simple de recordarla $\overline{N}'_s + \kappa \overline{t} = \overline{N}'_s + \overline{n}'(s) = 0$.

También podemos caracterizar geométricamente las líneas asintóticas.

Proposición 2.22. *Condición necesaria y suficiente para que una curva de la superficie sea asintótica es que en cada uno de sus puntos el plano tangente a la superficie coincida con el plano osculador de la curva.*

DEM. Las líneas asintóticas están caracterizadas por la ecuación $e + 2f\lambda + g\lambda^2 = 0$. Recordemos que el numerador de la expresión para la curvatura normal se obtuvo efectuando el producto $\langle d\overline{x}, d\overline{N}\rangle$, por lo que

$$\langle d\overline{x}, d\overline{N}\rangle = 0,$$

que dividiendo por ds puede escribirse como $\langle d\overline{N}, \overline{t}\rangle = 0$. Es bien conocido que $\langle \overline{t}, \overline{N}\rangle = 0$. Luego $d\langle \overline{N}, \overline{t}\rangle = \langle d\overline{N}, \overline{t}\rangle + \langle \overline{N}, d\overline{t}\rangle$, por lo que $\langle d\overline{t}, \overline{N}\rangle = 0$, dividiendo de nuevo por ds, resulta que $\langle \overline{N}, d\overline{t}/ds\rangle = \langle \overline{N}, \kappa\overline{n}\rangle = \kappa\langle \overline{N}, \overline{n}\rangle = 0$, y tenemos que

$$\kappa\langle \overline{N}, \overline{n}\rangle = 0.$$

Esta expresión se satisface cuando $\kappa = 0$ o para $\langle \overline{N}, \overline{n}\rangle = 0$. Luego todas las rectas de una superficie ($\kappa = 0$) son líneas asintóticas. Y cuando no es así como $\langle \overline{N}, \overline{n}\rangle = 0$, $\overline{N} \perp \overline{n}$, pero como $\overline{t} \perp \overline{N}$ y $\overline{t} \perp \overline{n}$, es decir $\langle \overline{t} \times \overline{n}\rangle = \overline{b} = \overline{N}$. Luego el plano osculador coincide con el plano tangente.

El resultado recíproco también es cierto, teniendo en cuenta que todo plano que pasa por una recta puede considerarse como plano osculador de esta. □

2.16 Teorema de Euler. Indicatriz de Dupin. Líneas asintóticas

Teorema 2.6. *(Teorema de Euler)*

Si llamamos α al ángulo que forman, en un punto dado, una dirección $\lambda = dv/du$ con la dirección de las líneas de curvatura, y si κ es la curvatura según $\lambda = dv/du$, entonces

$$\kappa = \kappa_1 \cos^2\alpha + \kappa_2 \operatorname{sen}^2\alpha,$$

siendo κ_1 y κ_2 las curvaturas de las secciones normales correspondientes a las direcciones principales en dicho punto.

DEM. Podemos suponer, para demostrar este teorema, que las curvas paramétricas son las líneas de curvatura. De acuerdo con el teorema anterior tenemos que $F = f = 0$ y por tanto la fórmula para la curvatura normal y el elemento de línea pasan a ser

$$\kappa_n = \frac{edu^2 + gdv^2}{Edu^2 + Gdv^2}, \qquad ds = \sqrt{Edu^2 + Gdv^2}.$$

Recordemos que

$$\cos\alpha = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}},$$

por tanto el ángulo que forma la dirección dv/du con la $v =$ cte., es decir $\delta v = 0$, será

$$\cos\alpha = \frac{Edu\delta u}{\sqrt{Edu^2 + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2}} = \sqrt{E}\,\frac{du}{ds}.$$

El ángulo $\beta = \pi/2 - \alpha$ es el ángulo que forma la dirección dv/du dada, con la curva $u =$ cte., es decir $\delta u = 0$, ya que las curvas $u =$ cte. y $v =$ cte$'$. son ortogonales. Por tanto

$$\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta = \frac{G dv\delta v}{ds\sqrt{G\delta v^2}} = \sqrt{G}\,\frac{dv}{ds}.$$

De donde, aplicando el corolario anterior resulta

$$\begin{aligned}
\kappa_n &= \frac{edu^2 + gdv^2}{Edu^2 + Gdv^2} = \frac{edu^2 + gdv^2}{ds^2} \\
&= e\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + g\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = e\frac{\cos^2\alpha}{E} + g\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{G} \\
&= \kappa_1\cos^2\alpha + \kappa_2\operatorname{sen}^2\alpha.
\end{aligned}$$

□

Observación 2.39. *El teorema de Euler junto con el ya visto teorema de Meusnier dan información completa respecto de la curvatura de cualquier curva de la superficie que pase por el punto P.*

Definición 2.27. *Sean κ_1 y κ_2 las curvaturas según las direcciones principales. Se denomina indicatriz de Dupin a la cónica*

$$\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2 = \pm 1.$$

Proposición 2.23. *La intersección de la superficie con un plano próximo al plano tangente y paralelo a él, es, en primera aproximación, semejante a la indicatriz de Dupin.*

Dem. Cortemos la superficie por un plano paralelo al plano tangente en un punto elíptico, a una distancia ϵ de él, y proyectemos la intersección sobre el plano tangente.

Sabemos que en el entorno de un punto $\overline{x}_0$ de la superficie, se verifica, aplicando Taylor en dos variables[87] , que

$$\overline{x} = \overline{x}_0 + (\overline{x}'_u h + \overline{x}'_v k) + \frac{1}{2}(\overline{x}''_{uu}h^2 + 2\overline{x}''_{uv}hk + \overline{x}''_{vv}k^2) + \ldots$$

La distancia D de un punto $\overline{x}$ de la superficie al plano tangente en $\overline{x}_0$, vendrá dada, al ser $\langle \overline{x}'_u, \overline{N}\rangle = 0$ y $\langle \overline{x}'_v, \overline{N}\rangle = 0$, por

$$\langle(\overline{x} - \overline{x}_0), \overline{N}\rangle = \frac{1}{2}\left[\langle \overline{x}''_{uu}, \overline{N}\rangle h^2 + 2\langle \overline{x}''_{uv}, \overline{N}\rangle hk + \langle \overline{x}''_{vv}, \overline{N}\rangle k^2\right] + \ldots$$

cuya parte principal será

$$D_p = \frac{1}{2}(eh^2 + 2fhk + gk^2).$$

Consideramos ahora que hemos parametrizado (u, v) según las líneas de curvatura, luego $f = 0$. Por otro lado y debido a la ortogonalidad $dx = |\overline{x}'_u|du = \sqrt{E}du$ y análogamente $dy = |\overline{x}'_v|dv = \sqrt{G}dv$. Si ahora tomamos como $\overline{x}_0$ el origen de coordenadas tiene sentido

[87]Por triplicado, ya que lo aplicamos para las tres funciones $x_1(u, v)$, $x_2(u, v)$ y $x_3(u, v)$. No olvidemos que $\overline{x}'_u = [(x_1)'_u, (x_2)'_u, (x_3)'_u]$, etc., etc.,

que introduzcamos las variables $x = \sqrt{E}\, h = \sqrt{E}\, du$, e $y = \sqrt{G}\, k = \sqrt{G}\, dv$, y llamando ϵ a la distancia al plano tangente, resultará

$$2\epsilon = \frac{e}{E}x^2 + \frac{g}{G}y^2.$$

Dividiendo esta ecuación por 2ϵ y transformando la x y la y mediante las semejanzas $x \to x\sqrt{2\epsilon}$ $y \to y\sqrt{2\epsilon}$, convertiremos

$$\frac{e}{E}x^2 + \frac{g}{G}y^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2 = 1.$$

Es claro que si se trata de un punto hiperbólico tendremos necesariamente una curvatura principal negativa, por ejemplo κ_2, y aparecen un par de hipérbolas (con la orientación cambiada si tomamos -1 (otro plano paralelo al tangente pero por encima de la superficie).

Si el punto fuera parabólico solo habría una dirección asintótica, una curvatura principal sería nula, por ejemplo κ_2, y tendríamos, $x^2 = \pm 1/\kappa_1$, es decir dos rectas paralelas en la dirección de la línea asintótica. Nótese que esto es lo que ocurre en el toro (en cualquier punto perteneciente a los llamados *paralelos medios*) cuando cortamos la superficie con un plano paralelo al tangente. □

Observación 2.40. *En un punto hiperbólico, las direcciones principales vienen representadas por los ejes de la indicatriz y las direcciones asintóticas se corresponden con las asíntotas de la indicatriz ¿Porqué? Es sencillo. Las asíntotas de la indicatriz son las direcciones con pendiente, respecto a $v =$ cte., dadas por*

$$m_i = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \pm \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{\pm 1 - \kappa_1 x^2}{\kappa_2}} = \pm\sqrt{-\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}.$$

Las direcciones asintóticas se obtienen al resolver $\kappa_1 \cos^2\alpha + \kappa_2 \operatorname{sen}^2\alpha = 0$, según el teorema de Euler. Es decir, $m_a^2 = \tan^2\alpha = -\kappa_1/\kappa_2$. Luego $m_i = m_a$ y las direcciones asintóticas coinciden en dirección con las asíntotas de la indicatriz. Por tanto tenemos.

Teorema 2.7. *Las direcciones principales son bisectrices de las direcciones asintóticas.*

DEM. Recuérdese que los ejes de una hipérbola son siempre bisectrices de sus asíntotas. Por lo que las direcciones principales son bisectrices de las direcciones asintóticas. □

Definición 2.28. *Dos direcciones sobre una superficie en un punto P, ni umbílico ni parabólico*[88] *de ella, se dicen conjugadas si corresponden a las direcciones dadas por dos diámetros conjugados*[89] *de la indicatriz de Dupin en ese punto.*

[88] Nótese que hay dos direcciones asintóticas únicamente si los puntos son hiperbólicos.

[89] En la teoría de cónicas se dice que por ejemplo dos diámetros de una elipse son conjugados, si las tangentes a la elipse en ambos extremos de uno de ellos son paralelas al otro diámetro.

3 Superficies mínimas, fórmulas de Gauss-Weingarten, Gauss-Codazzi, Brioschi, líneas geodésicas, y los tres teoremas fundamentales

3.1 Superficies mínimas

Definición 3.1. *Se denominan superficies mínimas aquellas para las cuales las curvas asintóticas son ortogonales en todo punto.*

Observación 3.1. *Se dicen mínimas porque están relacionadas con las superficies que aparecen cuando fijando una frontera –una curva alabeada cerrada– tratamos de resolver el problema de encontrar la que tiene área mínima para dicha prefijada frontera, y que llamaremos, como es natural, superficie de área minima. La relación entre las superficies mínimas y las superficies de área mínima la establecerá el teorema 3.2.*

Teorema 3.1. *Para que una superficie sea mínima es necesario y suficiente que la curvatura media en todos sus puntos sea nula.*

DEM. Si las líneas asintóticas forman un sistema ortogonal, entonces la indicatriz de Dupin está formada por dos hipérbolas equiláteras, por tanto las asíntotas son perpendiculares $x^2 - y^2 = \pm 1$, en consecuencia $\kappa_1 = -\kappa_2$ y la curvatura media M es cero. $\square$

Corolario 3.1. *La condición necesaria y suficiente para que una superficie sea mínima es que se cumpla en todo punto*

$$Eg - 2Ff + Ge = 0.$$

Teorema 3.2. *Si existe una superficie de área mínima que pase por una curva alabeada cerrada, entonces es una superficie mínima.*

DEM. Para probarlo, consideremos una pequeña deformación de una superficie $\overline{x}(u, v)$, definida mediante la ecuación

$$\overline{x}_1 = \overline{x} + \epsilon \overline{N},$$

donde ϵ es arbitrariamente pequeño y, al igual que $\overline{x}$ y $\overline{N}$, función de u y v. Tendremos

$$\begin{aligned}
(\overline{x}_1)'_u &= \overline{x}'_u + \epsilon \overline{N}'_u + \epsilon_u \overline{N}, \\
(\overline{x}_1)'_v &= \overline{x}'_v + \epsilon \overline{N}'_v + \epsilon_v \overline{N},
\end{aligned}$$

y como coeficientes de la primera forma fundamental de la superficie deformada, tenemos

$$\begin{aligned}
\langle (\overline{x}_1)'_u, (\overline{x}_1)'_u \rangle &= \langle \overline{x}'_u, \overline{x}'_u \rangle + \epsilon \langle \overline{x}'_u, \overline{N}'_u \rangle + \epsilon'_u \langle \overline{x}'_u, \overline{N} \rangle + \\
&\quad \epsilon \langle \overline{N}'_u, \overline{x}'_u \rangle + \epsilon^2 \langle \overline{N}'_u, \overline{N}'_u \rangle + \epsilon \epsilon'_u \langle \overline{N}'_u, \overline{N} \rangle + \\
&\quad \epsilon'_u \langle \overline{N}, \overline{x}'_u \rangle + \epsilon'_u \epsilon \langle \overline{N}, \overline{N}'_u \rangle + (\epsilon'_u)^2 \langle \overline{N}, \overline{N} \rangle.
\end{aligned}$$

Sabemos que $\langle \overline{x}'_u, \overline{N} \rangle = 0$ y también $\langle \overline{N}, \overline{N}'_u \rangle = 0$, y también que $\langle \overline{x}'_u, N'_u \rangle = -e$, etc., despreciando los términos de orden superior en ϵ, tenemos que $E_1 = E - 2\epsilon\, e$. Análogamente para G_1 y F_1. Por tanto resulta

$$E_1 = E - 2\epsilon\, e, \qquad F_1 = F - 2\epsilon\, f, \qquad G_1 = G - 2\epsilon\, g.$$

Luego, introduciendo la curvatura media M, resulta

$$\begin{aligned} E_1G_1 - F_1^2 &= (EG - F^2) - 2\epsilon\,(Eg - 2Ff + Ge) = \\ &= (EG - F^2) - 4\epsilon\, M\,(EG - F^2) \\ &= (EG - F^2)(1 - 4\epsilon M). \end{aligned} \tag{56}$$

Extrayendo la raíz cuadrada en (56), recordando que $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$, despreciando los términos en ϵ de orden superior, operando e integrando ahora sobre el área encerrada por un contorno fijo C, tendremos

$$\iint \sqrt{E_1G_1 - F_1^2}\, dudv = \iint \sqrt{EG - F^2}\, dudv - 2\iint \epsilon\, M\sqrt{EG - F^2}\, dudv.$$

Esta igualdad puede escribirse, llamando $\delta S = -2\iint \epsilon(u,v)\ MdA$ donde dA es el elemento de área de la primera superficie, como

$$S_1 - S = \delta S = -2\iint \epsilon(u,v)\ MdA. \tag{57}$$

Si la superficie es de área mínima tendremos que $\delta S = 0$. Eso ocurriria para toda función $\epsilon(u,v)$, la única posibilidad de que eso pueda suceder es que el integrando de la integral del miembro derecho de (57) sea nulo, y eso solo ocurre si $M = 0$. Luego si la variación es nula (ser de área minima) entonces $M = 0$, que es la definición de superficie mínima. Por tanto área mínima implica superficie mínima[90]. □

Observación 3.2. *El recíproco no es cierto. Un ejemplo conocido es la superficie de Enneper*[91] , $\overline{x}(u,v) = [u - u^3/3 + uv^2, v - v^3/3 + vu^2, u^2 - v^2]$. *Se trata de una superficie mínima que no tiene área mínima. La comprobación numérica (ver pág. 251-253 de [12]) se consigue limitándola con la curva* $u = r\cos\theta$ *y* $v = r\sin\theta$, *con* $r = 3/2$, *calculando el área encerrada por dicha curva sobre la superficie de Enneper, y viendo que es mayor que el área que la citada curva encierra sobre un cilindro generalizado que también la contiene.*

Ejercicio 3.1. Probar que el plano $\overline{x}(u,v) = [u, v, au + bv + c]$, el catenoide $\overline{x}(u,v) = [a\cos u\cosh(\frac{v}{a}), a\,\mathrm{sen}\, u\cosh(\frac{v}{a}), v]$, para el que $K = -1/(a^2\cosh^4\frac{v}{a})$, y el helicoide recto $\overline{x}(u,v) = [ur\cos v, ur\,\mathrm{sen}\, v, kv]$, con $K = -k^2/(r^2u^2 + k^2)^2$, son superficies mínimas. Existen otras superficies mínimas menos obvias como las de Scherk $\overline{x}(u,v) = [u, v, \ln(\cos(u)) - \ln(\sin(v))]$, la arriba citada de Enneper, Hennenberg, Richmond, etc,. (ver pags. 721-772 de [8]).

[90] Podríamos llegar a este mismo resultado aplicando el cálculo de variaciones a $\delta\left(\iint \sqrt{1 + p^2 + q^2}dxdy\right) = \delta\left(\iint F(x,y,z,p,q)dxdy\right) = 0$, donde $p = \partial f/\partial x$ y $q = \partial f/\partial y$. Si $r = \partial^2 f/\partial x^2$, $s = \partial^2 f/(\partial x \partial y)$, y $t = \partial^2 f/\partial y^2$, la ecuación de Euler del cálculo de variaciones que es

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) - \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right) = 0,$$

pasa a ser $r(1 + q^2) - 2pqx + t(1 + p^2) = 0$, que equivale a $M = 0$ en cartesianas.

[91] $\Re(w - \frac{1}{3}w^3) = u - u^3/3 + uv^2$, $y = \Im(w + \frac{1}{3}w^3) = v - v^3/3 + vu^2$, $z = \Re(w^2) = u^2 - v^2$, con $w = u + iv \in \mathbb{C}$.

Ejemplo 3.1. *Consideremos el catenoide* $\overline{x}(u,v) = [\cos v \cosh u, \operatorname{sen} v \cosh u, u]$. *Veamos que es una superficie mínima. En efecto*

$$\begin{aligned}
\overline{x}'_u &= [\cos v \sinh u, \operatorname{sen} v \sinh u, 1], \quad \overline{x}'_v = [-\operatorname{sen} v \cosh u, \cos v \cosh u, 0], \\
\overline{x}''_{u^2} &= [\cos v \cosh u, \operatorname{sen} v \cosh u, 0], \quad \overline{x}''_{uv} = [-\operatorname{sen} v \sinh u, \cos v \sinh u, 0], \\
\overline{x}''_{v^2} &= [-\cos v \cosh u, -\operatorname{sen} v \cosh u, 0].
\end{aligned}$$

De donde $E = \langle \overline{x}'_u, \overline{x}'_u \rangle = \sinh^2 u + 1 = \cosh^2 u$, *y* $G = \langle \overline{x}'_v, \overline{x}'_v \rangle = \cosh^2 u$. *Obviamente por tratarse de una superficie de revolución* $F = f = 0$. *Por otro lado*

$$\begin{aligned}
\overline{N} &= \frac{\overline{x}'_u \times \overline{x}'_v}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{1}{\cosh^2 u} \begin{vmatrix} \overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \overline{e}_3 \\ \cos v \sinh u & \operatorname{sen} v \sinh u & 1 \\ -\operatorname{sen} v \cosh u & \cos v \cosh u & 0 \end{vmatrix} \\
&= \frac{[-\cos v, -\operatorname{sen} v, \sinh u]}{\cosh u}.
\end{aligned}$$

Luego tendremos que

$$\begin{aligned}
e &= \langle \overline{x}''_{u^2}, \overline{N} \rangle = \frac{-\cos^2 v \cosh u - \operatorname{sen}^2 v \cosh u}{\cosh u} = -1, \\
g &= \langle \overline{x}''_{v^2}, \overline{N} \rangle = \frac{\cos^2 v \cosh u + \operatorname{sen}^2 v \cosh u}{\cosh u} = 1.
\end{aligned}$$

De donde

$$Ge + gE - 2Ff = -\cosh^2 u + \cosh^2 u = 0.$$

Por tanto se trata de una superficie mínima.

Ejercicio 3.2. Determinar la curvatura media de $\overline{h}(x,y) = [x, y, f(x,y)]$, en función de las parciales primeras y segundas de $f(x,y)$.

3.2 Un primera aproximación a las líneas geodésicas de una superficie

Observación 3.3. *En su momento vimos que se cumplía*

$$\overline{\kappa} = \overline{\kappa}_n + \overline{\kappa}_g,$$

donde $\overline{\kappa}_n$ *es la curvatura normal y* κ_g *la curvatura tangencial o geodésica. De donde* $\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2$. *Recordemos que* $\overline{\kappa}_n$ *y* $\overline{\kappa}_g$ *son las componentes del vector curvatura de la curva que se trate respecto de la normal* $\overline{N}$ *y respecto de la dirección*[92] $\overline{N} \times \overline{t}$ *sobre el plano tangente.*

Definición 3.2. *Definimos las geodésicas como curvas tales que en todos sus puntos tienen curvatura geodésica (o tangencial) nula. O lo que es lo mismo aquellas para las que en todos sus puntos se verifica que* $\overline{N} = \pm \overline{n}$.

[92] La proyección de $\kappa\overline{n}$ sobre $\overline{N}$ no precisa aclaración. Por otro lado $\overline{N}$ y $\overline{n}$, caso de no tener la misma dirección, determinan un plano que interseca el plano tangente en una dirección perpendicular a $\overline{t}$, debido a que $\overline{t}$ y $\overline{n}$ son perpendiculares, que es justamente $\overline{N} \times \overline{t}$.

Ejemplo 3.2. *Consideremos la esfera. Si proyectamos la normal a cualquier círculo máximo sobre el plano tangente en ese punto a la esfera obtenemos un punto. Por tanto la curvatura geodésica de los círculos máximos en la esfera es nula, son las geodésicas sobre la esfera.*

Ejemplo 3.3. *Un ligero cálculo nos muestra que las hélices circulares sobre un cilindro tienen la normal paralela al plano de la base del cilindro (es decir la tercera componente es nula y la normal siempre es perpendicular a la superficie del cilindro). La proyección del vector normal sobre el plano tangente correspondiente es nula. En consecuencia las hélices (degeneradas o no) son las geodésicas sobre el cilindro*[93].

Proposición 3.1. *Sea una superficie $\overline{y}(u,v)$ y un punto $P(u,v)$ sobre ella. Sea una curva $\overline{x}(s) = \overline{y}(u(s),v(s))$ contenida en la superficie y que pasa por P, y sea $\overline{N}(u,v)$ el vector normal a la superficie en P y sean $\overline{t}(s)$ y $\overline{n}(s) = \overline{t}'(s)/\kappa$ la tangente y la normal a la curva en dicho punto. Entonces la curvatura geodésica de curva $u(s), v(s)$ en P vale*

$$\kappa_g = \langle \overline{t}, \overline{t}' \times \overline{N} \rangle = \left(\overline{t}(s), \overline{t}'(s), \overline{N}(s) \right).$$

Dem. Sea $\overline{u}$ un vector unitario perpendicular a $\overline{N}$ y $\overline{t}$. Cualquier vector que pasando por el punto pertenezca al plano definido por $\overline{N}$ y $\overline{u}$ es perpendicular a $\overline{t}$. En particular $\overline{n}$ que sabemos es perpendicular a $\overline{t}$.

Supondremos que $\overline{\kappa}_g = \kappa_g \overline{u}$. Sabemos que

$$\overline{\kappa} = \overline{\kappa}_n + \overline{\kappa}_g.$$

Luego multiplicando escalarmente por $\overline{u}$ la anterior igualdad, al ser $\overline{\kappa} = \overline{t}'(s) = \overline{x}''(s)$, tendremos

$$\langle \overline{u}, \frac{d\overline{t}}{ds} \rangle = \langle \overline{u}, \overline{\kappa}_n \rangle + \langle \overline{u}, \overline{\kappa}_g \rangle = \langle \overline{u}, \overline{\kappa}_g \rangle = \kappa_g.$$

El vector $\overline{u}$ está en el plano tangente[94] en la dirección de la proyección sobre este de $\overline{n}$, y como hemos señalado perpendicular a $\overline{t}$, por tanto

$$\overline{u} = \overline{N} \times \overline{t}.$$

En consecuencia

$$\kappa_g = \langle (\overline{N} \times \overline{t}), \overline{t}'(s) \rangle = \langle \overline{t} \times \overline{t}', \overline{N} \rangle.$$

□

Es muy interesante el siguiente corolario que pone de manifiesto que la curvatura geodesíca de una curva mide en el punto lo que se separa dicha curva de una geodésica, en total analogía a como la curvatura cuantifica en el plano lo que en un punto una curva se aleja de ser una recta.

Corolario 3.2. *Si la superficie es un plano, entonces la curvatura geodésica coincide con la curvatura.*

[93] Recuérdese el problema de la mosca y la araña en el cilindro. Sea el cilindro $\overline{g}(t) = [r\cos(u), r\sin(u), v]$, de radio $r = 4/\pi$. Se consideran $M(u = 0, v = 1)$ y $F(u = \pi, v = 4)$ puntos sobre el cilindro. Calcular la distancia mínima sobre el cilindro (obviamente siguiendo una geodésica) entre ambos puntos.

[94] Piénsese que $\overline{n}$ está en el plano perpendicular a $\overline{t}$ que pasa por $\overline{N}$.

DEM. Si se trata de un plano $\overline{N}$ es constante y obviamente $\overline{N} = \bar{b}$, en consecuencia

$$\kappa_g = \langle \bar{t} \times \bar{t}', \bar{b} \rangle = \langle \bar{t} \times \kappa\overline{n}, \bar{b} \rangle = \kappa\langle \bar{t} \times \overline{n}, \bar{b} \rangle = \kappa\langle \bar{b}, \bar{b} \rangle = \kappa.$$

$\square$

Ejercicio 3.3. Sea la superficie de revolución $\overline{x}(u) = [f(u)\cos v, f(u)\operatorname{sen} v, g(u)]$. Sea $\overline{m}(s) = [f(s)\cos(v), f(s)\operatorname{sen} v, g(s)]$, un meridiano de la superficie, que supondremos parametrizado respecto del elemento de arco s. Probar que es una geodésica.

Proposición 3.2. *Las diferentes familias de curvas de una superficie estudiadas hasta ahora verifican las siguientes relaciones:*

i) *Línea asintótica* $\wedge$ *Línea geodésica* $\Longleftrightarrow$ *Es una línea recta.*

ii) *Línea de curvatura* $\wedge$ *Línea geodésica* $\Longrightarrow$ *Es una curva plana.*

iii) *Es una curva plana* $\wedge$ *Línea geodésica* $\Longrightarrow$ *Línea de curvatura.*

DEM. Recordemos la caracterización de las diferentes familias de curvas de una superficie

$$\begin{array}{lll}
\text{ser línea asintótica} & \Longleftrightarrow & \langle d\overline{x}, d\overline{N} \rangle = 0, \\
\text{ser línea de curvatura} & \Longleftrightarrow & d\overline{N} + \kappa d\overline{x} = 0, \\
\text{ser curva plana} & \Longleftrightarrow & \tau = 0, \\
\text{ser línea recta} & \Longleftrightarrow & \kappa = 0, \\
\text{ser geodésica} & \Longleftrightarrow & \overline{N} = \pm\overline{n}, \\
\text{curvatura = paramétricas} & \Longleftrightarrow & F = f = 0.
\end{array}$$

i) $\Rightarrow$)

Partimos de que $\langle d\overline{N}, d\overline{x} \rangle = 0$, como $\overline{N} = \pm\overline{n}$ por ser línea geodésica, tendremos que $\langle d\overline{x}, \pm d\overline{n} \rangle = 0$, y dividiendo por ds dos veces $\langle \bar{t}, \pm\overline{n}' \rangle = 0$. Sabemos de las ecuaciones de Frenet-Serret que $\overline{n}' = -\kappa\bar{t} + \tau\bar{b}$, luego substituyendo, y operando (recordemos que $\bar{t} \perp \bar{b}$) resulta

$$\langle \bar{t}, \pm(-\kappa\bar{t} + \tau\bar{b}) \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad -\kappa \cdot 1 = 0,$$

luego se trata de una recta.

$\Leftarrow$) Es trivial porque sabemos que una recta sobre la superficie es a la vez una geodésica y una línea asintótica (curvatura normal nula).

ii)

Tenemos que $\overline{N} = \pm\overline{n}$ por ser geodésica. La fórmula de Olinde Rodrigues, por ser de curvatura, nos dice que $d\overline{N} + \kappa d\overline{x} = 0$. Dividiendo por ds y substituyendo queda

$$\pm\overline{n}' + \kappa\bar{t} = 0.$$

Aplicando de nuevo Frenet-Serret y multiplicando escalarmente por $\bar{b}$ resulta

$$\langle \pm(-\kappa\bar{t} + \tau\bar{b}) + \kappa\bar{t}, \bar{b} \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \pm\tau \cdot 1 = 0,$$

Luego $\tau = 0$ y se trata de una curva plana.

iii)

Ahora partimos de $\overline{N} = \pm\overline{n}$. Consideraremos que el signo es $+$, si fuera $-$ tomaríamos $\overline{N}$ en sentido contrario. De la fórmula de Frenet-Serret tenemos que $\overline{n}' = -\kappa\bar{t} + \tau\bar{b}$, como la curva es plana $\tau = 0$, luego $\overline{n}' = -\kappa\bar{t}$, es decir

$$\overline{n}' + \kappa\bar{t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{N}' + \kappa\bar{t} = 0,$$

que no es otra cosa que la condición de Olinde Rodriguez. Por lo tanto $\overline{N}' + \kappa\bar{t} = 0$ se satisface y se trata de una línea de curvatura. □

Observación 3.4. *No se cumple que ser curva plana y de curvatura implique ser geodésica. Como contraejemplo valen algunos paralelos de las superficies de revolución. Sabemos que las superficies de revolución verifican que $F = f = 0$, es decir satisfacen la condición necesaria y suficiente para que sus curvas paramétricas sean líneas de curvatura.*

Probaremos, más adelante, que todos los meridianos son geodésicas, pero no todos los paralelos (salvo en el cilindro); incluso una superficie de revolución puede no tener ningún paralelo que sea geodésica: el cono o el paraboloide; otras superficies como la esfera, solo tienen un paralelo que es a la vez geodésica: el ecuador.

Otro ejemplo; en el toro los paralelos superior e inferior sabemos que son líneas de curvatura ¡y líneas asintóticas! y obviamente son curvas planas, pero no son geodésicas. Si lo son en cambio los paralelos garganta interna y perímetro externo (se justificará más adelante).

Corolario 3.3. *Sea una curva de ecuaciones $u = u(s)$ y $v = v(s)$ sobre la superficie $\overline{x}(u, v)$, entonces la curvatura geodésica, en el punto que corresponda, de la curva dada será*

$$\begin{aligned}\kappa_g \;=\; & \langle \overline{x}'_u \times \overline{x}''_{uu}, \overline{N}\rangle (u'(s))^3 + \left[\langle 2\overline{x}'_u \times \overline{x}''_{uv}, \overline{N}\rangle + \langle \overline{x}'_v \times \overline{x}''_{uu}, \overline{N}\rangle\right] (u'(s)^2 v'(s)) \\ & + \left[\langle \overline{x}'_u \times \overline{x}''_{vv}, \overline{N}\rangle + \langle 2\overline{x}'_v \times \overline{x}''_{uv}, \overline{N}\rangle\right] (u'(s)v'(s)^2) + \langle \overline{x}'_v \times \overline{x}''_{vv}, \overline{N}\rangle (v'(s))^3 \\ & + \langle \overline{x}'_u \times \overline{x}'_v, \overline{N}\rangle \left[u'(s)v''(s) - u''(s)v'(s)\right].\end{aligned}$$

Dem. Como la curva está sobre la superficie su ecuación en función de s es $\overline{x}(u(s), v(s))$, luego el vector unitario $\bar{t}$ satisface

$$\bar{t}(s) = \frac{d}{ds}\overline{x}(u(s), v(s)) = \overline{x}'_u u'(s) + \overline{x}'_v v'(s),$$

de donde

$$\begin{aligned}\bar{t}'(s) \;=\; & \overline{x}''_{uu}(u'(s))^2 + \overline{x}''_{uv} u'(s)v'(s) + \overline{x}'_u u''(s) + \\ & \overline{x}''_{vu} v'(s)u'(s) + \overline{x}''_{vv}(v'(s))^2 + \overline{x}'_v v''(s).\end{aligned}$$

Sumando los dos términos iguales queda

$$\bar{t}'(s) = \overline{x}'_u u''(s) + \overline{x}''_{uu}(u'(s))^2 + 2\overline{x}''_{uv} u'(s)v'(s) + \overline{x}''_{vv}(v'(s))^2 + \overline{x}'_v v''(s).$$

Efectuando ahora el producto mixto $\langle \bar{t} \times \bar{t}', \overline{N}\rangle$, resulta

$$\begin{aligned}\kappa_g \;=\; & \langle \overline{x}'_u \times \overline{x}''_{uu}, \overline{N}\rangle\; u'(s)^3 + \\ & \left[\langle 2\overline{x}'_u \times \overline{x}''_{uv}, \overline{N}\rangle + \langle \overline{x}'_v \times \overline{x}''_{uu}, \overline{N}\rangle\right]\; u'(s)^2 v'(s) + \\ & \left[\langle \overline{x}'_u \times \overline{x}''_{vv}, \overline{N}\rangle + \langle 2\overline{x}'_v \times \overline{x}''_{uv}, \overline{N}\rangle\right]\; u'(s)v'(s)^2 + \\ & \langle \overline{x}'_v \times \overline{x}''_{vv}, \overline{N}\rangle\; v'(s)^3 + \\ & \langle \overline{x}'_u \times \overline{x}'_v, \overline{N}\rangle \left[u'(s)v''(s) - u''(s)v'(s)\right]. \end{aligned} \tag{58}$$

□

3.3 Símbolos de Christoffel, fórmulas de Gauss y Weingarten, notación tensorial

Definición 3.3. *Introducimos los símbolos de Christoffel de primera especie*

$$\begin{array}{llll} [11,1] = \langle \overline{x}''_{uu}, \overline{x}'_u\rangle, & [11,2]= \langle \overline{x}''_{uu}, \overline{x}'_v\rangle, & [12,1] = \langle \overline{x}''_{uv}, \overline{x}'_u\rangle, & [12,2]= \langle \overline{x}''_{uv}, \overline{x}'_v\rangle \\ [21,1] = \langle \overline{x}''_{vu}, \overline{x}'_u\rangle, & [21,2]= \langle \overline{x}''_{vu}, \overline{x}'_v\rangle, & [22,1] = \langle \overline{x}''_{vv}, \overline{x}'_u\rangle, & [22,2]= \langle \overline{x}''_{vv}, \overline{x}'_v\rangle \end{array}$$

y los de segunda especie que se definen

$$\begin{array}{rcl} \overline{x}''_{uu} &=& \Gamma^1_{11}\overline{x}'_u + \Gamma^2_{11}\overline{x}'_v + h_{11}\overline{N} \\ \overline{x}''_{uv} &=& \Gamma^1_{12}\overline{x}'_u + \Gamma^2_{12}\overline{x}'_v + h_{12}\overline{N} \\ \overline{x}''_{vv} &=& \Gamma^1_{22}\overline{x}'_u + \Gamma^2_{22}\overline{x}'_v + h_{22}\overline{N}. \end{array}$$

Enunciamos los siguientes resultados, probando los más simples, que pueden encontrarse a partir de la página 121 en adelante de [14].

Proposición 3.3. *(Obtención de $[ij,k]$)*
Se cumplen

$$\begin{array}{ll} [11,1] = \langle \overline{x}''_{uu}, \overline{x}'_u\rangle = \dfrac{1}{2}E'_u, & [11,2] = \langle \overline{x}''_{uu}, \overline{x}'_v\rangle = F'_u - \dfrac{1}{2}E'_v, \\ [12,1] = \langle \overline{x}''_{uv}, \overline{x}'_u\rangle = \dfrac{1}{2}E'_v, & [12,2] = \langle \overline{x}''_{uv}, \overline{x}'_v\rangle = \dfrac{1}{2}G'_u \\ [21,1] = \langle \overline{x}''_{vu}, \overline{x}'_u\rangle = \dfrac{1}{2}E'_v, & [21,2] = \langle \overline{x}''_{vu}, \overline{x}'_v\rangle = \dfrac{1}{2}G'_u \\ [22,1] = \langle \overline{x}''_{vv}, \overline{x}'_u\rangle = F'_v - \dfrac{1}{2}G'_u, & [22,2] = \langle \overline{x}''_{vv}, \overline{x}'_v\rangle = \dfrac{1}{2}G'_v. \end{array}$$

DEM. Derivando $\langle \overline{x}'_u, \overline{x}'_u\rangle = E$ respecto de u y v, y $\langle \overline{x}'_u, \overline{x}'_v\rangle = F$ respecto de u resultan

$$2\,\langle \overline{x}'_u, \overline{x}''_{uu}\rangle = E'_u, \qquad 2\,\langle \overline{x}'_u, \overline{x}''_{uv}\rangle = E'_v, \qquad \langle \overline{x}'_u, \overline{x}''_{vu}\rangle + \langle \overline{x}''_{uu}, \overline{x}'_v\rangle = F'_u.$$

En consecuencia

$$[11,1] = \frac{1}{2}E'_u, \qquad [11,2] = F'_u - \frac{1}{2}E'_v.$$

Analogamente derivando $\langle \overline{x}'_v, \overline{x}'_v\rangle = G$, respecto de v tenemos $2\langle \overline{x}'_v, \overline{x}''_{vv}\rangle = G'_v$, por tanto $[22,2] = G'_v/2$. Asimismo derivando $\langle \overline{x}'_v, \overline{x}'_v\rangle = G$, pero ahora respecto de u tendremos $2\langle \overline{x}''_{vu}, \overline{x}'_v\rangle = G'_u$, es decir $[21,2] = G'_u$, etc,.etc.

□

Teorema 3.3. *(Obtención de Γ^k_{ij}. Fórmulas de Gauss)*
Se verifica

$$\begin{array}{rcl} \overline{x}''_{uu} &=& \Gamma^1_{11}\overline{x}'_u + \Gamma^2_{11}\overline{x}'_v + h_{11}\overline{N} \\ \overline{x}''_{uv} &=& \Gamma^1_{12}\overline{x}'_u + \Gamma^2_{12}\overline{x}'_v + h_{12}\overline{N} \\ \overline{x}''_{vv} &=& \Gamma^1_{22}\overline{x}'_u + \Gamma^2_{22}\overline{x}'_v + h_{22}\overline{N}. \end{array}$$

donde

$$h_{11} = e, \quad h_{12} = f, \quad h_{22} = g,$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{GE'_u - 2FF'_u + FE'_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF'_u - EE'_v - FE'_u}{2(EG - F^2)}, \\
\Gamma_{12}^1 &= \frac{GE'_v - FG'_u}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{EG'_u - FE'_v}{2(EG - F^2)}, \\
\Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF'_v - GG'_u - FG'_v}{2(EG - F^2)}, & \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG'_v - 2FF'_v + FG'_u}{2(EG - F^2)}.
\end{aligned}$$

Dem. Todo vector puede expresarse como combinación lineal de los tres vectores fundamentales del triedro móvil: $\overline{x}'_u$, $\overline{x}'_v$, $\overline{N}$. De acuerdo con la definición de los símbolos de Christoffel

$$\begin{aligned}
\overline{x}''_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \overline{x}'_u + \Gamma_{11}^2 \overline{x}'_v + h_{11}\overline{N} \\
\overline{x}''_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \overline{x}'_u + \Gamma_{12}^2 \overline{x}'_v + h_{12}\overline{N} \\
\overline{x}''_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \overline{x}'_u + \Gamma_{22}^2 \overline{x}'_v + h_{22}\overline{N}.
\end{aligned}$$

Multiplicando escalarmente por $\overline{N}$ las tres ecuaciones obtenemos

$$h_{11} = \langle \overline{x}''_{uu}, \overline{N} \rangle = e, \qquad h_{12} = \langle \overline{x}''_{uv}, \overline{N} \rangle = f, \qquad h_{22} = \langle \overline{x}''_{vv}, \overline{N} \rangle = g.$$

Multiplicando escalarmente por $\overline{x}'_u$ y $\overline{x}'_v$ la primera ecuación obtenemos el par de ecuaciones

$$\begin{aligned}
[11,1] &= \langle \overline{x}''_{uu}, \overline{x}'_u \rangle = E\,\Gamma_{11}^1 + F\,\Gamma_{11}^2 \\
[11,2] &= \langle \overline{x}''_{uu}, \overline{x}'_v \rangle = F\,\Gamma_{11}^1 + G\,\Gamma_{11}^2.
\end{aligned} \tag{59}$$

Resolviendo en Γ_{11}^1, Γ_{11}^2 por Cramer y substituyendo $[11,1]$ y $[11,2]$ resulta

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{[11,1]G - [11,2]F}{EG - F^2} = \frac{GE'_u - 2FF'_u + FE'_v}{2(EG - F^2)}, \\
\Gamma_{11}^2 &= \frac{[11,2]E - [11,1]F}{EG - F^2} = \frac{2EF'_u - EE'_v - FE'_u}{2(EG - F^2)}.
\end{aligned}$$

Volviendo a multiplicar escalarmente por $\overline{x}'_u$ y $\overline{x}'_v$ la segunda ecuación obtenemos

$$\begin{aligned}
[12,1] &= \langle \overline{x}''_{uv}, \overline{x}'_u \rangle = E\,\Gamma_{12}^1 + F\,\Gamma_{12}^2 \\
[12,2] &= \langle \overline{x}''_{uv}, \overline{x}'_v \rangle = F\,\Gamma_{12}^1 + G\,\Gamma_{12}^2.
\end{aligned} \tag{60}$$

Resolviendo en Γ_{12}^1, Γ_{12}^2 por Cramer y substituyendo $[12,1]$ y $[12,2]$ resulta

$$\begin{aligned}
\Gamma_{12}^1 &= \frac{[12,1]G - [12,2]F}{EG - F^2} = \frac{GE'_v - FG'_u}{2(EG - F^2)} \\
\Gamma_{12}^2 &= \frac{[12,2]E - [12,1]F}{EG - F^2} = \frac{EG'_u - FE'_v}{2(EG - F^2)}.
\end{aligned}$$

Volviendo a multiplicar escalarmente por $\overline{x}'_u$ y $\overline{x}'_v$ la tercera ecuación obtenemos

$$\begin{aligned}
[22,1] &= \langle \overline{x}''_{vv}, \overline{x}'_u \rangle = E\,\Gamma_{22}^1 + F\,\Gamma_{22}^2 \\
[22,2] &= \langle \overline{x}''_{vv}, \overline{x}'_v \rangle = F\,\Gamma_{22}^1 + G\,\Gamma_{12}^{22}.
\end{aligned} \tag{61}$$

Resolviendo en Γ_{22}^1, Γ_{22}^2 por Cramer y substituyendo $[22,1]$ y $[22,2]$ resulta

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^1 &= \frac{[22,1]G-[22,2]F}{EG-F^2} = \frac{2GF'_v - GG'_u - FG'_v}{2(EG-F^2)} \\
\Gamma_{22}^2 &= \frac{[22,2]E-[22,1]F}{EG-F^2} = \frac{EG'_v - 2FF'_v + FG'_u}{2(EG-F^2)}.
\end{aligned}$$

Nmemotécnicamente es más sencillo recordarlas en forma matricial:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} &= (g)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E'_u \\ F'_u - \frac{1}{2}E'_v \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{pmatrix} &= (g)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}E'_v \\ \frac{1}{2}G'_v \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} &= (g)^{-1} \begin{pmatrix} F'_v - \frac{1}{2}G'_u \\ \frac{1}{2}G'_v \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

donde

$$(g) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

□

Teorema 3.4. *(Fórmulas de Weingarten)*
Se verifica

$$\begin{aligned}
\overline{N}'_u &= \frac{fF-eG}{EG-F^2}\overline{x}'_u + \frac{eF-fE}{EG-F^2}\overline{x}'_v, \\
\overline{N}'_v &= \frac{gF-fG}{EG-F^2}\overline{x}'_u + \frac{fF-gE}{EG-F^2}\overline{x}'_v.
\end{aligned}$$

O lo que es lo mismo llamando

$$\begin{aligned}
\overline{N}'_u &= p_1\overline{x}'_u + p_2\overline{x}'_v, \\
\overline{N}'_v &= q_1\overline{x}'_u + q_2\overline{x}'_v.
\end{aligned}$$

Entonces se cumple

$$\begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix} = -(g)^{-1}h.$$

Nótese que al ser $-(g)^{-1}h$ una matriz simétrica se puede afirmar que

$$\begin{pmatrix} \overline{N}'_u \\ \overline{N}'_v \end{pmatrix} = -(g)^{-1}h \begin{pmatrix} \overline{x}'_u \\ \overline{x}'_v \end{pmatrix}.$$

Dem. Sabemos que

$$e = -\langle \overline{x}'_u, \overline{N}'_u \rangle, \qquad f = -\langle \overline{x}'_u, \overline{N}'_v \rangle = -\langle \overline{x}'_v, \overline{N}'_u \rangle, \qquad g = -\langle \overline{x}'_v, \overline{N}_v \rangle.$$

Escribiendo

$$\begin{aligned}
\overline{N}'_u &= p_1\overline{x}'_u + p_2\overline{x}'_v, \\
\overline{N}'_v &= q_1\overline{x}'_u + q_2\overline{x}'_v.
\end{aligned}$$

Multiplicando escalarmente por $\overline{x}'_u$ y $\overline{x}'_v$ las dos ecuaciones anteriores, resultan dos sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{aligned} -e &= p_1 E + p_2 F, \\ -f &= p_1 F + p_2 G, \\ -f &= q_1 E + q_2 F, \\ -g &= q_1 F + q_2 G. \end{aligned}$$

De donde resultan, aplicando trivialmente Cramer, las fórmulas del enunciado. Que análogamente

$\square$

Definición 3.4. *En lo que sigue introduciremos la notación tensorial, que es particularmente útil en el caso n dimensional. En primer lugar llamaremos*

$$(g) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \qquad (h) = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}.$$

Asimismo se conoce como matriz de Weingarten a la matriz simétrica

$$W_p = -g^{-1}h.$$

Obsérvese que con esta notación,

$$K = \det(-g^{-1}h), \qquad M = \frac{\text{traza}(g^{-1}h)}{2}.$$

Por otro lado si convenimos en que $\overline{x}'_u \equiv \overline{x}'_1$, $\overline{x}'_v \equiv \overline{x}'_2$, y en el caso general $\overline{x}'_{u_k} \equiv \overline{x}'_k$, etc., se escribirá

$$\langle \overline{x}'_j, \overline{x}'_k \rangle = g_{jk}.$$

Nótese que si pasamos a hipersuperficies –variedades de dimensión 3– sumergidas en $\mathbb{R}^4$. Habríamos de tomar $i, j \in \{1, 2, 3\}$. La matriz $(g) = (\langle \overline{x}'_j, \overline{x}'_k \rangle)^3_{j,k=1}$, tendría dimensión 3×3, etc.,

Asimismo, notaremos con

$$(g^{-1}) = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

En todo lo que sigue utilizaremos el convenio de Einstein que prescinde de sumatorios, de modo que $\sum_{i=1}^n a_i \overline{x}'_i$, se escribirá como $a_i \overline{x}'_i$, mientras que $\sum_{i,j=1}^n g_{ij} du_i du_j$, quedará como $g_{ij} du_i du_j$, y un producto matricial, por ejemplo el $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$, se simbolizará como $c_{ij} = a_{ik} b_{kj}$.

Entendiendo que cuando se repita un índice en dos factores hay que sumar respecto de dicho índice. Los valores que toman los índices quedan claros en el contexto, en el caso que nos ocupa $i, j, k, r \in \{1, 2\}$, en el caso general $i, j, k, r \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Nótese que con este convenio tiene sentido escribir

$$g_{ij} g^{jk} = \delta_{ik},$$

donde $\delta_{i,k}$ es la delta de Kronecker, es decir $\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & si \quad i = k, \\ 0 & si \quad i \neq k, \end{cases}$

Ejemplo 3.4.

a) Las fórmulas de Gauss con notación tensorial son (hay que sumar en k)

$$\begin{aligned} \overline{x}''_{ij} &= \Gamma^k_{ij}\overline{x}'_k + h_{ij}\overline{N} \\ &= \Gamma^1_{ij}\overline{x}'_1 + \Gamma^2_{ij}\overline{x}'_2 + h_{ij}\overline{N}. \end{aligned}$$

b) Las ecuaciones de Weingarten[95] *con notación tensorial, se escribirían (hay que sumar en r y en j)*

$$\begin{aligned} \overline{N}'_i &= -(h_{ir}\, g^{rj})\overline{x}'_j \\ &= -(h_{i1}g^{1j} + h_{i2}g^{2j})\overline{x}'_j \\ &= -(h_{i1}g^{11} + h_{i2}g^{21})\overline{x}'_1 - (h_{i1}g^{12} + h_{i2}g^{22})\overline{x}'_2. \end{aligned}$$

Para completar nuestras reflexiones sobre la notación tensorial probemos el siguiente teorema que resume los cálculos de los tres anteriores con elegante brevedad y además es muy fácil de memorizar.

Teorema 3.5. *Se cumplen*

$$a) \qquad [ij,k] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}\right), \tag{62}$$

$$b) \qquad \Gamma^r_{ij} = g^{kr}[ij,k] = \frac{1}{2}g^{kr}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}\right). \tag{63}$$

Dem. Obviamente $\langle \overline{x}'_i, \overline{x}'_k\rangle = g_{ik}$. Se cumplirán

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} &= \frac{\partial}{\partial u_j}\langle \overline{x}'_i, \overline{x}'_k\rangle = \langle \overline{x}''_{ij}, \overline{x}'_k\rangle + \langle \overline{x}'_i, \overline{x}''_{kj}\rangle \\ \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} &= \frac{\partial}{\partial u_i}\langle \overline{x}'_j, \overline{x}'_k\rangle = \langle \overline{x}''_{ji}, \overline{x}'_k\rangle + \langle \overline{x}'_j, \overline{x}''_{ki}\rangle \\ \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} &= \frac{\partial}{\partial u_k}\langle \overline{x}'_i, \overline{x}'_j\rangle = \langle \overline{x}''_{ik}, \overline{x}'_j\rangle + \langle \overline{x}'_i, \overline{x}''_{jk}\rangle \end{aligned}$$

Sumando las dos primeras y restando la última, teniendo en cuenta la conmutatividad del producto escalar y el teorema de Schwarz, tenemos

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} = 2\langle \overline{x}''_{ij}, \overline{x}'_k\rangle = 2[ij,k],$$

[95] Requieren una explicación que veremos en una proposición separadamente. Llamando (g_{ij}) a la primera forma cuadrática y (h_{ij}) a la segunda se tiene

$$\begin{pmatrix} \overline{N}'_u \\ \overline{N}'_v \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \overline{x}'_u \\ \overline{x}'_v \end{pmatrix},$$

es decir $\overline{N}'_i = -h_{ik}g^{kj}\overline{x}'_j$, siendo $g_{ij}g^{jk} = \delta_{ik}$, con el convenio de suma de índices mudos de Einstein. La matriz $W_p = -(h\,g^{-1})^t = -g^{-1}h$ permite definir el operador "shape", Petersen, o de Weingarten. Sus autovalores son las curvaturas principales y los autovectores correspondientes son las componentes de $\{\overline{x}'_i\}_{i=1}^n$, que nos permiten obtener las direcciones principales (ver pags. 179-180 [2], en hipersuperficies ver pág. 47 de [6]) como vectores n dimensionales.

de donde
$$[ij,k]=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}\right).$$

Luego hemos demostrado la primera igualdad. Veamos la segunda. Por la definición

$$\overline{x}''_{ij}=\Gamma^r_{ij}\overline{x}'_r+h_{ij}\overline{N}.$$

Multiplicando escalarmente por $\overline{x}'_k$, y recordando que $\langle \overline{x}_i,\overline{x}_j\rangle = g_{ij}$, y que $\overline{x}'_k\perp\overline{N}$ tendremos
$$\langle \overline{x}''_{ij},\overline{x}'_k\rangle=[ij,k]=\Gamma^r_{ij}\,g_{rk}.$$

Definimos (g^{kl}) como la matriz inversa de (g_{rk}), por tanto $g_{rk}g^{kl}=\delta_{rl}$. Multiplicando ambos miembros por g^{kl}, resulta

$$[ij,k]\,g^{kl}=\Gamma^l_{ij},$$

si ahora cambiamos la letra l por la r para que resulte el enunciado, tendremos finalmente que
$$\Gamma^r_{ij}=[ij,k]\,g^{kr}=\frac{1}{2}g^{kr}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j}+\frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}\right).$$

□

Ejemplo 3.5. *Veamos como funcionan las fórmulas del teorema 3.5. Imaginemos que deseamos calcular* $[11,1]$ *y* $[11,2]$*, se tendrá de acuerdo con la fórmula (62) que*

$$\begin{aligned}
[11,1] &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u}+\frac{\partial g_{11}}{\partial u}-\frac{\partial g_{11}}{\partial u}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(E'_u+E'_u-E'_u\right)=\frac{1}{2}E'_u.\\
[11,2] &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u}+\frac{\partial g_{12}}{\partial u}-\frac{\partial g_{11}}{\partial v}\right)=\frac{1}{2}\left(F'_u+F'_u-E'_v\right)\\
&= F'_u-\frac{1}{2}E'_v.
\end{aligned}$$

Estos símbolos de Christoffel coinciden obviamente con los calculados anteriormente por el otro método. Calculemos ahora Γ^2_{12} *utilizando la fórmula (63). Tendremos*

$$\Gamma^2_{12}=g^{2r}[12,r]=g^{21}[12,1]+g^{22}[12,2]. \tag{64}$$

Resulta aplicando (62) que

$$\begin{aligned}
[12,1] &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial v}+\frac{\partial g_{21}}{\partial u}-\frac{\partial g_{12}}{\partial u}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(E'_v+F'_u-F'_u\right)=\frac{1}{2}E'_v.\\
[12,2] &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial v}+\frac{\partial g_{22}}{\partial u}-\frac{\partial g_{12}}{\partial v}\right)=\frac{1}{2}\left(F'_v+G'_u-F'_v\right)\\
&= \frac{1}{2}G'_u.
\end{aligned}$$

Asimismo tendremos que

$$g^{21} = \frac{-F}{EG - F^2}, \qquad g^{22} = \frac{E}{EG - F^2}.$$

En consecuencia, substituyendo todos estos valores en (64) resultará

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^2 &= \frac{-F}{EG - F^2}\left(\frac{1}{2}E'_v\right) + \frac{E}{EG - F^2}\left(\frac{1}{2}G'_u\right) \\ &= \frac{EG'_u - FE'_v}{2(EG - F^2)}, \end{aligned}$$

que también es el valor calculado anteriormente.

Corolario 3.4. *Si el sistema de curvas paramétricas es ortogonal con $i, j, r \in \{1, 2\}$, entonces*

$$\Gamma_{ij}^r = \frac{1}{2\, g_{rr}}\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{jr}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_r}\right)$$

(sin sumas respecto de i, j o r).

Dem. Al ser $F = 0$, es decir, $g_{12} = g_{21} = 0$. Por tanto $g^{11} = 1/g_{11}$, $g^{22} = 1/g_{22}$ y $g^{21} = g^{12} = 0$, la consecuencia es inmediata, ya que en $\Gamma_{ij}^r = g^{1r}[ij, 1] + g^{2r}[ij, 2]$, si $r = 1$ se anula el segundo y si $r = 2$ se anula el primero por la ortogonalidad.

□

Corolario 3.5. *Sea un sistema de curvas paramétricas ortogonal, con $i, j, r \in \{1, 2\}$, se cumplen:*

a) Si $j = r$, entonces $\Gamma_{ir}^r = \dfrac{1}{2g_{rr}}\dfrac{\partial g_{rr}}{\partial u_i}$.

b) Si $i = j \neq r$, entonces $\Gamma_{ii}^r = \dfrac{-1}{2g_{rr}}\dfrac{\partial g_{ii}}{\partial u_r}$.

Dem.

a) Resulta inmediata ya que si en el corolario anterior hacemos $j = r$, el primero y el ultimo sumando se cancelan, y queda el segundo.

b) Si hacemos $i = j$ con $r \neq i = j$, es claro por la ortogonalidad $g_{ir} = g_{jr} = 0$ y solo queda el último sumando.

□

Observación 3.5. *Las constantes de Christoffel solo dependen de la primera forma y de sus derivadas, pero obviamente si varian con la parametrización utilizada. Verificar que las constantes de Christoffel para $\overline{x}(u, v) = [\cos(u + v), \operatorname{sen}(u + v), \operatorname{sen}(u)]$, $u, v \in [0, 2\pi]$, no son todas nulas como ocurre si escojemos $\overline{x}(u, v) = [\cos(v), \operatorname{sen}(v), u]$, $v \in [0, 2\pi]$ y $u \in [-1, 1]$ y sin embargo se trata de la misma superficie.*

Observación 3.6. *Por Schwartz se cumple, al ser $\overline{x}''_{uv} = \overline{x}''_{vu}$, y aunque no se introdujeron Γ_{21}^1 y Γ_{21}^2, podemos considerarlos, y por ello resulta claro que $\Gamma_{ij}^r = \Gamma_{ji}^r$. Utilizando esta observación y los dos corolarios anteriores cubrimos todos los posibles casos para un sistema de coordenadas paramétricas ortogonales con $i, j, r \in \{1, 2\}$.*

Corolario 3.6. *Si las curvas paramétricas son ortogonales por los corolarios 3.4 y 3.5 los símbolos de Christoffel son:*

$$\begin{array}{rr} \Gamma^1_{11} = \dfrac{E'_u}{2E} & \Gamma^2_{11} = -\dfrac{E'_v}{2G} \\ \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \dfrac{E'_v}{2E} & \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \dfrac{G'_u}{2G} \\ \Gamma^1_{22} = -\dfrac{G'_u}{2E} & \Gamma^2_{22} = \dfrac{G'_v}{2G}. \end{array}$$

Ejemplo 3.6. *En el plano*[96] $ds^2 = dx^2 + dy^2$, *es decir* $F = 0$ *y* $E = G = 1$, *resulta que*

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^2_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{12} = \Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{22} = 0.$$

Ejemplo 3.7. *Sea la esfera*[97] $\overline{x}(u,v) = [r\cos u \cos v, r \operatorname{sen} v \cos u, r \operatorname{sen} u]$, *entonces se tiene que* $ds^2 = r^2\, du^2 + r^2 \cos^2(u) dv^2$, *es decir* $E = r^2$, $F = 0$ *y* $G = r^2\cos^2(u)$, *de donde* $E'_u = E'_v = G'_v = 0$ *y en consecuencia*

$$\begin{array}{rcl} \Gamma^1_{11} &=& \Gamma^2_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = 0, \\ \Gamma^2_{12} &=& \Gamma^2_{21} = \dfrac{G'_u}{2G} = \dfrac{-2r^2 \cos u \operatorname{sen} u}{2r^2\cos^2(u)} = -\dfrac{\operatorname{sen} u}{\cos u}, \\ \Gamma^1_{22} &=& -\dfrac{G'_u}{2E} = \dfrac{2r^2\cos u \operatorname{sen} u}{2r^2} = \cos(u)\operatorname{sen}(u). \end{array}$$

Proposición 3.4. $\Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{12} = 0$, *si y solo si, la superficie es de traslación.*

DEM. Es inmediata teniendo en cuenta que $\overline{x}(u,v) = \overline{\alpha}(u) + \overline{\beta}(v)$, i.e. $\overline{x}''_{uv} = 0$. □

Proposición 3.5. *La fórmula de Weingarten puede escribirse*

$$\overline{N}'_i = -(h_{ik}\, g^{kj})\, \overline{x}'_j.$$

Es decir es cierto el producto matricial del pie de la página 87 y el apartado b) de la observación 3.4.

DEM. Cambiaremos un poco la notación y llamaremos $\alpha_{11} = p_1$, $\alpha_{12} = p_2$, $\alpha_{21} = q_1$ y $\alpha_{22} = q_2$, tendremos que $\overline{N}'_i = \alpha_{ij}\overline{x}'_j$. Multipliquemos escalarmente por $\overline{x}'_r$, sabemos[98] que $\langle \overline{N}'_i, \overline{x}'_r\rangle = -h_{ir}$. En consecuencia

$$\begin{array}{rcl} \langle N'_i, \overline{x}'_r\rangle &=& -h_{ir} = \alpha_{ij}\, \langle \overline{x}'_j, \overline{x}'_r\rangle \\ &=& \alpha_{ij}\, g_{jr}. \end{array}$$

De donde $\alpha_{ij}\, g_{jr} = -h_{ir}$, luego multiplicando por g^{rk} ambos miembros resultará

$$\alpha_{ij}\, g_{jr}\, g^{rk} = -(h_{ir}\, g^{rk}),$$

luego $\alpha_{ij}\delta_{jk} = \alpha_{ik} = -(h_{ir}\ g^{rk})$. en consecuencia y cambiando k por j tendremos $\alpha_{ij} = -(h_{ir}\, g^{rj})$, r es un índice mudo que preferimos cambiar por k y finalmente $N'_i = -(h_{ik}\, g^{kj})\, \overline{x}'_j$. □

---

[96]En polares $\overline{x}(\rho,\theta) = [\rho\cos\theta, \rho\sin\theta]$, es claro que $ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$, con $E = 1$, $F = 0$ y $G = \rho^2$.

[97]Obsérvese aunque eso es irrelevante que los polos están el eje OZ.

[98]Recordemos que $\langle \overline{N}'_u, \overline{x}'_u\rangle = -e = -h_{11}$, $\langle \overline{N}'_u, \overline{x}'_v\rangle = -f = -h_{12}$, $\langle \overline{N}'_v, \overline{x}'_u\rangle = -f = -h_{21}$ y finalmente que $\langle \overline{N}'_v, \overline{x}'_v\rangle = -g = -h_{22}$.

3.4 Isometrías entre superficies

El problema de construir mapas de la tierra– representaciones planas de regiones que no lo son– planteó la cuestión matemática de la existencia de una proyección ideal que aplicara $\overline{g} : R \to \mathbb{R}^2$, $R \subset S^2$, donde S^2 es la esfera de radio unidad, que preservara longitudes, ángulos y áreas. Esta aplicación ideal, utilizando terminología arcaica, se denomino "*desarrollo de la esfera sobre el plano*". Euler probó (ver pág. 116 de [3]) que tal desarrollo era imposible. Una extensión natural de este problema es el de determinar que *desarrollos* de una superficie sobre otra son posibles y qué propiedades conservan. El motivo de introducir este epígrafe es, además, el de entender plenamente el teorema egregium de Gauss que veremos más adelante.

Recordemos, por un lado, la definición de difeomorfismo entre dos superficies S_1 y S_2 –consideradas como conjuntos de puntos con una métrica sobre ellas dada por la primera forma – es, como sabemos, una aplicación biyectiva doblemente diferenciable. Por otro lado una aplicación $\phi : S_1 \to S_2$ se dice isométrica, si y solo si, $\forall p, q \in S_1$ se cumple que $d_1(p, q) = d_2(\phi(p), \phi(q))$. Nótese que en nuestro caso la métrica cambia con cada punto y cambia también al pasar de S_1 a S_2. Necesitamos por tanto clarificar esta definición de isometría. Asimismo recordemos también que la primera forma se define como

$$ds^2 = (du, dv) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}.$$

Notaremos con $T_p(S)$ al plano paralelo al plano tangente a S en p, que pasa por el origen. El conjunto $T_p(S) \subset \mathbb{R}^2$ puede considerarse como un conjunto de direcciones, o de vectores libres, de dos componentes, que queda fijo una vez escogido el punto p.

La primera forma, variable con p, permite que el producto escalar *standard* de $\mathbb{R}^3$ restringido a $T_p(S)$, pueda expresarse respecto a una base, también variable con p, en la siguiente forma, ya utilizada en la página 59. Para todo par de vectores $\overline{w}_1, \overline{w}_2 \in T_p(S)$, dados por sus componentes respecto de la base $\{\overline{x}'_u, \overline{x}'_v\}$, es decir si $\overline{w}_1 = \alpha_1 \overline{x}'_u + \beta_1 \overline{x}'_v$ y $\overline{w}_2 = \alpha_2 \overline{x}'_u + \beta_2 \overline{x}'_v$, su producto escalar es

$$\langle \overline{w}_1, \overline{w}_2 \rangle_p = (\alpha_1, \beta_1) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}.$$

El subíndice p no indica que el producto escalar no sea el usual, que por supuesto si lo es, sino que nos recuerda que estamos en $T_p(S)$ y la base es $\{\overline{x}'_u, \overline{x}'_v\}$, fijos, una vez escogido p.

Definición 3.5. *Dadas dos superficies*[99] S_1 *y* S_2*, cada una de ellas provista de su propia métrica, llamaremos* isometría entre superficies *a un difeomorfismo* $\phi : S_1 \to S_2$ *que además conserva las distancias –obviamente medidas sobre la superficies–, o lo que es lo mismo, si para todo punto* $p \in S_1$ *y para todo par de vectores* $\overline{w}_1, \overline{w}_2 \in T_p(S_1)$*, se cumple que*

$$\langle \overline{w}_1, \overline{w}_2 \rangle_p = \langle \phi(\overline{w}_1), \phi(\overline{w}_2) \rangle_{\phi(p)}.$$

Donde[100] *por* $\phi(\overline{w})$ *entendemos lo siguiente. Si en el punto* $p \in S_1$*,* $\overline{w} \in T_p(S_1)$ *es el vector tangente a una cierta curva* $\overline{y}(t) = \overline{x}(u(t), v(t))$ *que pasa por* p*, esa curva se*

[99] Obviamente cuando se corta para realizar la isometría (los tres ejemplos clásicos), la curva de corte debe ser eliminada de la superficie de partida, ya que si escogiésemos dos puntos cercanos pero cada uno de ellos a un lado del corte no se satisfaría el ser isométrica.

[100] Una aplicación diferenciable entre superficies induce una aplicación lineal entre los planos tangentes en puntos correspondientes (ver pág. 105 [3]).

transformará mediante la aplicación ϕ en la curva $(\phi \circ \overline{x})(u(t), v(t))$, entonces $\phi(\overline{w}) \in T_{\phi(p)}S_2$ es justamente el vector tangente a la curva transformada.

La elección del término isometría esta plenamente justificada ya que

$$ds^2 = |\overline{x}'_u du + \overline{x}'_v dv|^2 = \langle \overline{x}'_u du + \overline{x}'_v dv, \overline{x}'_u du + \overline{x}'_v dv \rangle = \langle d\overline{x}, d\overline{x} \rangle_p.$$

Por otro lado tenemos que $\overline{z}(u, v) = (\phi \circ \overline{x})(u, v)$, y por tanto

$$\begin{aligned} ds_1^2 &= \langle d\overline{x}, d\overline{x} \rangle_p = \langle \phi(d\overline{x}), \phi(d\overline{x}) \rangle_{\phi(p)} \\ &= \langle \overline{z}'_u du + \overline{z}'_v dv, \overline{z}'_u du + \overline{z}'_v dv \rangle = \langle d\overline{z}, d\overline{z} \rangle \\ &= |\overline{z}'_u du + \overline{z}'_v dv|^2 = ds_2^2. \end{aligned}$$

Los ejemplos más simples de isometrías provienen de las traslaciones y giros en $\mathbb{R}^3$. Una homotecia –obviamente si la razón es $k \neq 1$– no es una isometría. Pero hay isometrías que no son movimientos rígidos (es decir traslaciones o rotaciones). Por ejemplo si relacionamos los puntos de un cilindro finito (y sin un meridiano) con los puntos del rectángulo plano que resulta de desarrollarlo estaríamos ante una isometría que no es un movimiento rígido.

Definición 3.6. *Llamaremos intrínsecas a las propiedades que se conservan tras una isometría entre superficies y extrínsecas a las que no.*

Para ilustrar mejor lo que es una isometría entre superficies veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.8. *Consideremos la superficie S_1*

$$\overline{x}(u_1, v_1) = [u_1 \cos v_1, u_1 \operatorname{sen} v_1, c \ \operatorname{arg}\cosh(\frac{u_1}{c})]$$

que es un catenoide[101]*. Por otro lado sea el helicoide recto, que llamaremos S_2*

$$\overline{y}(u_2, v_2) = [u_2 \cos v_2, u_2 \sin v_2, a v_2].$$

Si calculamos la primera forma cuadrática para ambas superficies resulta que

$$\begin{aligned} \overline{x}'_{u_1} &= [\cos v_1, \operatorname{sen} v_1, 1/\sqrt{(u_1/c)^2 - 1}] \\ \overline{x}'_{v_1} &= [-u_1 \operatorname{sen} v_1, u_1 \cos v_1, 0]. \\ \overline{y}'_{u_2} &= [\cos v_2, \operatorname{sen} v_2, 0], \\ \overline{y}'_{v_2} &= [-u_2 \operatorname{sen} v_2, u_2 \cos v_2, a]. \end{aligned}$$

De donde tenemos para S_1

$$E_1 = 1 + \frac{c^2}{u_1^2 - c^2} = \frac{u_1^2}{u_1^2 - c^2}, \quad F_1 = 0, \quad G_1 = u_1^2,$$

y procediendo análogamente para S_2 queda

$$E_2 = 1, \quad F_2 = 0, \quad G_2 = u_2^2 + a^2.$$

[101] Habitualmente el catenoide se parametriza $\overline{z}(w, v) = [c\cosh(\frac{w}{c}) \cos v, c\cosh(\frac{w}{c}) \sin v, w]$. Basta con hacer el cambio de variable $w = c \operatorname{arg}\cosh(u/c)$, para obtener $\overline{x}(u, v) = [u \cos(v), u \operatorname{sen}(v), c \operatorname{arg}\cosh(u/c)]$.

es decir

$$\begin{aligned} ds_1^2 &= \frac{u_1^2}{u_1^2 - c^2}\, du_1^2 + u_1^2 dv_1^2, \\ ds_2^2 &= du_2^2 + (u_2^2 + a^2) dv_2^2. \end{aligned}$$

Si hacemos $a = c$*,* $v_2 = v_1$ *y* $u_1 = \sqrt{u_2^2 + a^2}$ *o* $u_2 = \sqrt{u_1^2 - a^2}$*, tendremos que*

$$du_2 = \frac{2u_1 du_1}{2\sqrt{u_1^2 - a^2}} \quad \Rightarrow \quad du_2^2 = \frac{u_1^2}{u_2^2 - a^2} du_1^2$$

queda

$$ds_1^2 = ds_2^2.$$

Luego la aplicación[102] $\phi : S_1 \to S_2$*, tras escoger* $a = c$*, que resulta es*

$$(u_2, v_2) = \phi(u_1, v_1) \equiv (\sqrt{u_1^2 - a^2}, v_1), \tag{65}$$

que es claramente biunívoca siempre que escojamos $v_1 \in (0, 2\pi)$ *y* $a < u_1 < 2a$*, o lo que es lo mismo* $v_2 \in (0, 2\pi)$ *y* $0 < u_2 < a\sqrt{3}$*. Las primeras formas son iguales en puntos correspondientes. Además si calculamos la curvatura gaussiana del catenoide tenemos*

$$K_1 = \frac{-c^2}{u_1^4} = \frac{-a^2}{(u_2^2 + a^2)^2}.$$

Por otro lado la curvatura gaussiana del helicoide recto es

$$K_2 = \frac{-a^2}{(u_2^2 + a^2)^2} = \frac{-c^2}{u_1^4} = K_1,$$

pudiendo verificarse que (65) nos permite escribir que $K_2 = K_1$*. Esto prueba que entre los puntos de un catenoide y los de un helicoide recto puede establecer una correspondencia –difeomorfismo isométrico– tal que son iguales los valores de* E*,* F *y* G *en puntos correspondientes, y por tanto, tienen la misma curvatura gaussiana.*

Las circunferencias del catenoide se transforman en las hélices del helicoide y las catenarias del catenoide se convierten en rectas perpendiculares al eje en el helicoide. Hay algunas preguntas naturales ¿Se conservan las geodésicas[103]*? ¿Se conservan las áreas*[104]*? ¿Se conservan los ángulos*[105]*?. La primera tiene respuesta afirmativa, mientras que es negativa para las otras dos.*

Observación 3.7. *En el contexto de las transformaciones isométricas también es natural que nos preguntemos, dadas dos superficies con métricas* ds_1^2 *y* ds_2^2*, ¿cuando existe una transformación isométrica* $\phi : S_1 \to S_2$ *tal que* $ds_1^2 = ds_2^2$ *se satisfaga? Así enunciado se denomina problema de Minding. El problema de la representación isométrica también puede enfocarse de otro modo. Dada una forma cuadrática definida positiva, hallar todas las superficies que admiten esta como primera forma. Así planteado se denomina problema de Bour.*

[102] Tras eliminar la curva de corte, en este ejemplo $v_1 = 0$.

[103] ¿Se trata de una transformación geodésica? Se prueba (pág 203 de [14]) que toda transformación isométrica es también geodésica, pero no recíprocamente.

[104] ¿Se trata de una transformación equivalente?

[105] ¿Se trata de una transformación conforme?

3.5 Ecuaciones de compatibilidad Gauss-Codazzi y Mainardi-Codazzi, fórmula de Brioschi

Los dos siguientes teoremas conocidos como de Gauss-Codazzi o Gauss-Mainardi-Codazzi son consecuencia directa de las fórmulas de Gauss. Pero requieren la introducción del tensor mixto de Riemann para abreviar convenientemente los enunciados, lo que haremos en la siguiente definición. En esta primera fase debemos interpretar R^h_{ijk} como una mera abreviatura. Se reserva la denominación de *tensor curvatura* de Riemann al tensor covariante que introduciremos más adelante.

Definición 3.7. *Se introduce el símbolo de Riemann (tensor de curvatura mixto de Riemann-Christoffel) para cualquier valor de $n \geq 2$, siguiente*

$$R^h_{ijk} \equiv \frac{\partial \Gamma^h_{ik}}{\partial u_j} - \frac{\partial \Gamma^h_{ij}}{\partial u_k} + \sum_{r=1}^{2} \left(\Gamma^r_{ik}\Gamma^h_{rj} - \Gamma^r_{ij}\Gamma^h_{rk} \right),$$

o con el convenio de Einstein, como

$$R^h_{ijk} \equiv \frac{\partial \Gamma^h_{ik}}{\partial u_j} - \frac{\partial \Gamma^h_{ij}}{\partial u_k} + \left(\Gamma^r_{ik}\Gamma^h_{rj} - \Gamma^r_{ij}\Gamma^h_{rk} \right),$$

sumando en r. En el caso $n = 2$, es decir cuando $i, j, k, h, r \in \{1, 2\}$ se tiene

$$\begin{aligned}
R^2_{121} &= \frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial v} - \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial u} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{21}, \\
R^1_{121} &= \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial v} - \frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial u} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} - \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{11} - \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{21}, \\
R^1_{212} &= \frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial u} - \frac{\partial \Gamma^1_{21}}{\partial v} + \Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{22}\Gamma^1_{21} - \Gamma^1_{21}\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{21}\Gamma^1_{22}, \\
R^2_{212} &= \frac{\partial \Gamma^2_{22}}{\partial u} - \frac{\partial \Gamma^2_{21}}{\partial v} + \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{22}\Gamma^2_{21} - \Gamma^1_{21}\Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{21}\Gamma^2_{22}.
\end{aligned}$$

Hemos señalado los términos que se simplifican.

Teorema 3.6. *(Ecuaciones de compatibilidad-*1 *de Gauss)*
Para $n = 2$ y por tanto cuando $K = (eg - f^2/(EG - F^2)$ se satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned}
EK &= R^2_{121} = \frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial v} - \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial u} + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12}. && (66) \\
FK &= -R^1_{121} = \frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial u} - \frac{\partial \Gamma^1_{11}}{\partial v} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} && (67) \\
GK &= R^1_{212} = \frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial u} - \frac{\partial \Gamma^1_{12}}{\partial v} + \Gamma^1_{22}\Gamma^1_{11} - \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{12} + \Gamma^2_{22}\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{22} && (68) \\
FK &= -R^2_{212} = \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial v} - \frac{\partial \Gamma^2_{22}}{\partial u} + \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{22}\Gamma^2_{11}. && (69)
\end{aligned}$$

DEM. Se verifica el teorema de Schwarz y se cumplirán las tres identidades siguientes

$$(\overline{x}''_{uu})'_v = (\overline{x}''_{uv})'_u, \qquad (\overline{x}''_{uv})'_v = (\overline{x}''_{vv})'_u, \qquad (\overline{N}_v)'_u = (\overline{N}'_u)'_v.$$

La primera y la segunda identidad las escribimos utilizando las fórmulas de Gauss como como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v}(\Gamma_{11}^{1}\overline{x}_u' + \Gamma_{11}^{2}\overline{x}_v' + e\overline{N}) &= \frac{\partial}{\partial u}(\Gamma_{12}^{1}\overline{x}_u' + \Gamma_{12}^{2}\overline{x}_v' + f\overline{N}) && (70) \\ \frac{\partial}{\partial v}(\Gamma_{12}^{1}\overline{x}_u' + \Gamma_{12}^{2}\overline{x}_v' + f\overline{N}) &= \frac{\partial}{\partial u}(\Gamma_{22}^{1}\overline{x}_u' + \Gamma_{22}^{2}\overline{x}_v' + g\overline{N}). && (71) \end{aligned}$$

Tras derivar aparecerán términos que dependen de $\overline{x}_{uu}''$, $\overline{x}_{uv}''$, $\overline{x}_{vv}''$, $\overline{N}_u'$, $\overline{N}_v'$, aplicamos de nuevo las fórmulas de Gauss y Weingarten para $\overline{N}_u'$ y $\overline{N}_v'$. Sacamos factor común en ambos miembros $\overline{x}_u'$, $\overline{x}_v'$ y $\overline{N}$. El lado izquierdo de la primera identidad queda como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v}\overline{x}_{uu}'' &= (\Gamma_{11}^{1})_v'\overline{x}_u' + \Gamma_{11}^{1}\boxed{\overline{x}_{uv}''} + (\Gamma_{11}^{2})_v'\overline{x}_u' + \Gamma_{11}^{2}\boxed{\overline{x}_{vv}''} + e\boxed{\overline{N}_v'} + e_v'\overline{N} \\ &= (\Gamma_{11}^{1})_v'\overline{x}_u' + \Gamma_{11}^{1}\boxed{\left(\Gamma_{12}^{1}\overline{x}_u' + \Gamma_{12}^{2}\overline{x}_v' + f\overline{N}\right)} + (\Gamma_{11}^{2})_v'\overline{x}_v' \\ &\quad + \Gamma_{11}^{2}\boxed{\left(\Gamma_{22}^{1}\overline{x}_u' + \Gamma_{22}^{2}\overline{x}_v' + g\overline{N}\right)} + e\boxed{(q_1\overline{x}_u' + q_2\overline{x}_v')} + e_v'\overline{N} \\ &= \left((\Gamma_{11}^{1})_v' + \Gamma_{11}^{1}\Gamma_{12}^{1} + \Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{1} + e\, q_1\right)\overline{x}_u' \\ &\quad + \left(\Gamma_{11}^{2})_v' + \Gamma_{11}^{1}\Gamma_{12}^{2} + \Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{2} + e\, q_2\right)\overline{x}_v' \\ &\quad + \left(\Gamma_{11}^{1}f + \Gamma_{11}^{2}g + e_v'\right)\overline{N}. \end{aligned}$$

Veamos el lado derecho de la primera identidad

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}\overline{x}_{uv}'' &= (\Gamma_{12}^{1})_u'\overline{x}_u' + \Gamma_{12}^{1}\boxed{\overline{x}_{uu}''} + (\Gamma_{12}^{2})_u'\overline{x}_v' + \Gamma_{12}^{2}\boxed{\overline{x}_{vu}''} + f\boxed{\overline{N}_u'} + f_u'\overline{N} \\ &= (\Gamma_{12}^{1})_u'\overline{x}_u' + \Gamma_{12}^{1}\boxed{\left(\Gamma_{11}^{1}\overline{x}_u' + \Gamma_{11}^{2}\overline{x}_v' + e\overline{N}\right)} + (\Gamma_{12}^{2})_u'\overline{x}_v' \\ &\quad + \Gamma_{12}^{2}\boxed{\left(\Gamma_{12}^{1}\overline{x}_u' + \Gamma_{12}^{2}\overline{x}_v' + f\overline{N}\right)} + f_u'\overline{N} + f\boxed{(p_1\overline{x}_u' + p_2\overline{x}_v')} \\ &= \left((\Gamma_{12}^{1})_u' + \Gamma_{12}^{1}\Gamma_{11}^{1} + \Gamma_{12}^{2}\Gamma_{12}^{1} + f\, p_1\right)\overline{x}_u' \\ &\quad + \left(\Gamma_{12}^{2})_u' + \Gamma_{12}^{1}\Gamma_{11}^{2} + \Gamma_{12}^{2}\Gamma_{12}^{2} + f\, p_2\right)\overline{x}_v' \\ &\quad + \left(\Gamma_{12}^{1}e + \Gamma_{12}^{2}f + f_u'\right)\overline{N}. \end{aligned}$$

Los vectores $\overline{x}_u'$, $\overline{x}_v'$ y $\overline{N}$ son linealmente independientes. Por otro lado de las fórmulas de Weingarten sabemos que

$$p_1 = \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \quad p_2 = \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \quad q_1 = \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \quad q_2 = \frac{fF - gE}{EG - F^2}.$$

Identificando los coeficientes del lado derecho y del lado izquierdo para $\overline{x}_u'$ resulta

$$\frac{\partial\Gamma_{11}^{1}}{\partial v} + \underset{\sim\sim\sim}{\Gamma_{11}^{1}\Gamma_{12}^{1}} + \Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{1} + e\frac{gF - fG}{EG - F^2} = \frac{\partial\Gamma_{12}^{1}}{\partial u} + \underset{\sim\sim\sim}{\Gamma_{12}^{1}\Gamma_{11}^{1}} + \Gamma_{12}^{2}\Gamma_{12}^{1} + f\frac{fF - eG}{EG - F^2}. \quad (72)$$

Identificando ahora los coeficientes del lado derecho y del lado izquierdo para $\overline{x}_v'$ quedará

$$\frac{\partial\Gamma_{11}^{2}}{\partial v} + \Gamma_{11}^{1}\Gamma_{12}^{2} + \Gamma_{11}^{2}\Gamma_{22}^{2} + e\frac{fF - gE}{EG - F^2} = \frac{\partial\Gamma_{12}^{2}}{\partial u} + \Gamma_{12}^{1}\Gamma_{11}^{2} + \Gamma_{12}^{2}\Gamma_{12}^{2} + f\frac{eF - fE}{EG - F^2}. \quad (73)$$

Haciendo lo mismo para los coeficientes de $\overline{N}$ en ambos miembros, tendremos

$$f\Gamma_{11}^1 + g\Gamma_{11}^2 + \frac{\partial e}{\partial v} = e\Gamma_{12}^1 + f\Gamma_{12}^2 + \frac{\partial f}{\partial u}, \tag{74}$$

una tercera identidad. La expresamos como

$$\frac{\partial e}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial u} = e\Gamma_{12}^1 + f(\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) - g\Gamma_{11}^2,$$

esta igualdad es la primera ecuación (75) de Mainardi-Codazzi.

Simplificando y agrupando como en el enunciado las dos primeras identidades (72) y (73), dan lugar repectivamente a (67) y (66).

Del mismo modo procedemos analogamente con la segunda identidad del principio. Que darán lugar a otras 3 ecuaciones a partir de (71). Tras derivar y aplicar Weingarten en ambos miembros, tenemos por un lado que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial v}\overline{x}''_{uv} &= (\Gamma_{12}^1)'_v\overline{x}'_u + \Gamma_{12}^1\boxed{\overline{x}''_{uv}} + (\Gamma_{12}^2)'_v\overline{x}'_v + \Gamma_{12}\boxed{\overline{x}''_{vv}} + f'_v\overline{N} + f\boxed{\overline{N}'_v} \\
&= (\Gamma_{12}^1)'_v\overline{x}'_u + \Gamma_{12}^1\boxed{(\Gamma_{12}^1\overline{x}'_u + \Gamma_{12}^2\overline{x}'_v + f\overline{N})} + (\Gamma_{12}^2)'_v\overline{x}'_v + \\
&\quad +\Gamma_{12}^2\boxed{(\Gamma_{22}^1\overline{x}'_u + \Gamma_{22}^2\overline{x}'_v + g\overline{N})} + f'_v\overline{N} + f\boxed{(q_1\overline{x}'_u + q_2\overline{x}'_v)} \\
&= \left((\Gamma_{12}^1)'_v + \Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{22}^1 + fq_1\right)\overline{x}'_u \\
&\quad + \left((\Gamma_{12}^2)'_v + \Gamma_{12}^2\Gamma_{22}^2 + fq_2\right)\overline{x}'_v \\
&\quad + \left(f'_v + \Gamma_{12}^1 f + \Gamma_{12}^2 g\right)\overline{N}.
\end{aligned}$$

Por el otro

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}\overline{x}''_{vv} &= (\Gamma_{22}^1)'_u\overline{x}'_u + \Gamma_{22}^1\boxed{\overline{x}''_{uu}} + (\Gamma_{22}^2)'_u\overline{x}'_v + \Gamma_{22}\boxed{\overline{x}''_{uv}} + g'_u\overline{N} + g\boxed{\overline{N}'_u} \\
&= (\Gamma_{22}^1)'_u\overline{x}'_u + \Gamma_{22}^1\boxed{(\Gamma_{11}^1\overline{x}'_u + \Gamma_{11}^2\overline{x}'_v + e\overline{N})} + (\Gamma_{22}^2)'_u\overline{x}'_v + \\
&\quad +\Gamma_{22}^2\boxed{(\Gamma_{12}^1\overline{x}'_u + \Gamma_{12}^2\overline{x}'_v + f\overline{N})} + g'_u\overline{N} + g\boxed{(p_1\overline{x}'_u + p_2\overline{x}'_v)} \\
&= \left((\Gamma_{22}^1)'_u + \Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2\Gamma_{12}^1 + gp_1\right)\overline{x}'_u \\
&\quad + \left((\Gamma_{22}^2)'_u + \Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2\Gamma_{12}^2 + gp_2\right)\overline{x}'_v \\
&\quad + \left(g'_u e\Gamma_{22}^1 + f\Gamma_{22}^2\right)\overline{N}.
\end{aligned}$$

Identificando ahora los coeficientes de $\overline{x}'_u$ tendremos

$$(\Gamma_{12}^1)'_v + \Gamma_{12}^1\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{22}^1 + fq_1 = (\Gamma_{22}^1)'_u + \Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^2\Gamma_{12}^1 + gp_1,$$

substituyendo los valores de q_1 y p_1 y operando obtenemos (68).

Identificando los coeficiente de $\overline{x}'_v$ resultará

$$(\Gamma_{12}^2)'_v + \Gamma_{12}^2\Gamma_{22}^2 + fq_2 = (\Gamma_{22}^2)'_u + \Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2\Gamma_{12}^2 + gp_2,$$

substituyendo los valores de q_2 y p_2 y operando obtenemos (69).

Identificando finalmente el coeficiente de $\overline{N}$ tendremos

$$\Gamma_{12}^1 f + \Gamma_{12}^2 g + \frac{\partial f}{\partial v} = \Gamma_{22}^1 e + \Gamma_{22}^2 f + \frac{\partial g}{\partial u},$$

de donde

$$\frac{\partial f}{\partial v}-\frac{\partial g}{\partial u}=e\Gamma^1_{22}+f(\Gamma^2_{22}-\Gamma^1_{12})-g\Gamma^2_{12}.$$

Con lo que resulta (76), segunda fórmula de Maninardi-Codazzi- □

Teorema 3.7. *(Ecuaciones de compatibilidad-2)*

Las dos ecuaciones de Codazzi o Mainardi-Codazzi son

$$\frac{\partial e}{\partial v}-\frac{\partial f}{\partial u} = e\Gamma^1_{12}+f(\Gamma^2_{12}-\Gamma^1_{11})-g\Gamma^2_{11}, \tag{75}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}-\frac{\partial g}{\partial u} = e\Gamma^1_{22}+f(\Gamma^2_{22}-\Gamma^1_{12})-g\Gamma^2_{12}. \tag{76}$$

DEM. Ambas ecuaciones las hemos deducido en la demostración del teorema anterior. La condición $(\overline{N}_v)'_u=(\overline{N}'_u)'_v$, si la hubiéramos desarrollado, nos habría dado otro método de obtener estas dos ecuaciones, que como hemos señalado se denominan de Mainardi-Codazzi. □

Observación 3.8. *Si escogemos cualquiera de las ecuaciones (67), (66) o cualquier otra, vemos que tienen en común que contienen los coeficientes de la segunda forma fundamental solamente en el numerador de $(eg-f^2)/(EG-F^2)$, que es justamente la curvatura gaussiana. Por tanto, cualquiera de las ecuaciones (67) o (66), etc., expresan la propiedad de que la curvatura gaussiana depende solo de E, F y G y de sus derivadas*[106]*. Lo que en realidad es una primera demostración del teorema de egregium de Gauss.*

Observación 3.9. *Las ecuaciones de compatibilidad (66), (67), (68) y (69), que hemos visto, que en forma resumida quedan como*

$$EK = R^2_{121}, \tag{77}$$

$$FK = -R^1_{121}, \tag{78}$$

$$GK = R^1_{212}, \tag{79}$$

$$FK = -R^2_{212}. \tag{80}$$

junto con las de Mainardi-Codazzi, se conocen como ecuaciones de compatibilidad. Se utilizan en el Teorema Fundamental de la Teoría de Superficies, ver pág. 122, para indagar, dados los coeficientes de la primera y la segunda forma E, F, G, y e, f, g, si existe una cierta superficie que solucione el problema inverso. Pero para K debe emplearse la expresión $K=(eg-f^2)/(EG-F^2)$ y no la K obtenida a partir de la la fórmula de Brioschi, ya que de hacer esto último solo detectaríamos el fallo hasta que comprobáramos las dos ecuaciones de Mainardi-Codacci.

Definición 3.8. *Se introduce también el tensor*[107] *covariante o tensor curvatura de Rie-*

[106]Siempre podemos escoger como curvas coordenadas las lineas de curvatura y por tanto $F=0$. Vimos que en ese caso en la expresión de las constantes de Christoffel solo aparecen los coeficientes de la primera forma y sus derivadas

[107]Puede probarse que las componentes del tensor covariante de Riemann-Christoffel con más de dos índices iguales son nulas. También se prueba que $R_{jikl}=-R_{ijkl}$, $R_{ijlk}=-R_{ijkl}$, $R_{klij}=R_{ijkl}$, $R_{ijkl}+R_{iklj}+R_{iljk}=0$. Para el tensor mixto se tiene que $R^i_{jkl}+R^i_{klj}+R^i_{ljk}=0$. Por último tenemos que hay $\binom{n}{2}$ componentes de solo dos índices distintos; $3\binom{n}{3}$ de solo tres índices distintos y $2\binom{n}{4}$ de cuatro índices distintos. Por lo que componentes distintas hay $\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+2\binom{n}{4}=n^2(n^2-1)/12$. Nótese que si $n=2$ tenemos 1 componente –nuestra familiar curvatura gaussiana–, si las variedades son tridimensionales $n=3$ resultan 6 componentes no nulas: R_{1212}, R_{1313}, R_{2323}, R_{1213}, R_{2123}, R_{3132} (ver pág. 114 [13]) y si $n=4$, aparecen 20 componentes.

mann al tensor de cuatro índices

$$R_{ijkh} = \sum_{r=1}^{n} g_{ir} R^r_{jkh}, \quad i.e. \quad R_{ijkh} = g_{im} R^m_{jkh}.$$

Proposición 3.6. *Se cumple para $n = 2$ que*

$$K = \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Dem. Multiplicando la tercera ecuación (79) por E, la cuarta (80) por F y restando, utilizando luego el nuevo tensor covariante, y en el caso $n = 2$, tenemos[108]

$$R_{1212} = ER^1_{212} + FR^2_{212} = (EG - F^2)K$$

luego finalmente

$$K_{12} = K = \frac{R_{1212}}{EG - F^2} = \frac{R_{1212}}{\det(g)}.$$

Nótese que en el caso en que h es 2×2, la componente R_{1212}, es decir el correspondiente menor 2×2, que va del $\boxed{11}$ al $\boxed{22}$ (en general $R_{ijkl} = \langle \overline{h}_{ik}, \overline{h}_{jl} \rangle - \langle \overline{h}_{il}, \overline{h}_{jk} \rangle$ donde $(h) = (\overline{h}_{ij})^m_{ij=1}$ es la segunda forma), en este caso $m = n - 1$, con $n = 3$, la segunda forma está compuesta por escalares, y vale $R_{1212} = eg - f^2$. □

Definición 3.9. *Las ecuaciones (75) y (76), junto con (77), (78), (79) y (80), se conocen como las seis ecuaciones de condición. Estas ecuaciones deben satisfacerse, ver Teorema Fundamental de la Teoría de Superficies, página 122, para que dada una primera forma $E(u, v)$, $F(u, v)$ y $G(u, v)$ (supuesta definida positiva) y una segunda forma $e(u, v)$, $f(u, v)$ y $g(u, v)$, exista una superficie $\overline{x}(u, v)$ que las tenga como tales.*

Observación 3.10. *Las ecuaciones de Codazzi con notación tensorial serían*[109]

$$\frac{\partial h_{ik}}{\partial u_j} - \frac{\partial h_{ij}}{\partial u_k} + \Gamma^r_{ik} h_{rj} - \Gamma^r_{ij} h_{rk} = 0,$$

que suma en r. Nótese que aunque aparentemente son 4 ecuaciones en realidad son solo dos ($i = k = 1, j = 2$) e ($i = k = 1, j = 2$), las dos que aparecen en (75) y (76).

Ejercicio 3.4. Obtener las ecuaciones de Mainardi-Codazzi cuando $F = f = 0$.

Observación 3.11. *Las aplicaciones de los teoremas de Gauss y de Maninardi-Codazzi, aparte de los teoremas fundamentales, son varias. Sin entrar en detalles y siguiendo a [14] pág 136, mencionaremos:*

i) Se prueba que entre el catenoide y el helicoide recto puede establecerse una correspondencia tal que sean iguales los valores de E, F y G en puntos homólogos y por tanto tengan la misma curvatura de Gauss.

[108]Para $n > 2$ se define la curvatura gaussiana "por secciones" (ver pág. 258 de [3]) como $K_{ij} = R_{ijij}/(g_{ii}g_{jj} - g_{ij}^2)$, que es la que resulta K cuando $n = 2$. De hecho se dice que una hipersuperficie tiene curvatura constante si y solo si son constantes todas sus curvaturas gaussianas "por secciones".

[109]Para memorizarla substituyase en la del tensor mixto $\Gamma^h_{\square\square} := h_{\square\square}$, e igualese a cero.

ii) La esfera es la única superficie en la que todos sus puntos son umbílicos.

iii) Teorema de Hilbert: En una región R de una superficie de curvatura gaussiana constante y positiva, sin umbílicos, las curvaturas principales toman sus valores extremos en el contorno.

iv) Teorema de Liebmann : La única superficie cerrada de curvatura constante y positiva (desprovista de singularidades) es la esfera.

La expresión del teorema egregium de Gauss, que veremos más adelante, y las fórmulas de Codazzi pueden ser escrita de varias maneras. F. Brioschi en 1852 dio una formulación de la curvatura de Gauss en las que E, F y G intervienen de una forma simétrica.

Teorema 3.8. *(Fórmula de Brioschi para la curvatura gaussiana)*

$$K=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\left\{\begin{vmatrix}\boxed{-\frac{1}{2}E''_{vv}+F''_{uv}-\frac{1}{2}G''_{uu}} & \frac12 E'_u & F'_u-\frac12 E'_v\\ F'_v-\frac12 G'_u & E & F\\ \frac12 G'_v & F & G\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}0 & \frac12 E'_v & \frac12 G'_u\\ \frac12 E'_v & E & F\\ \frac12 G'_u & F & G\end{vmatrix}\right\}. \tag{81}$$

Dem. Resulta inmediato de la propia definición de e, f y g, y aplicando en el producto de determinantes (correspondientes a los productos mixtos) la formula de Binet-Cauchy resultará[110]

$$\begin{aligned} K &= \frac{eg-f^2}{EG-F^2}=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\left[(\overline{x}''_{uu},\overline{x}'_u,\overline{x}'_v)(\overline{x}''_{vv},\overline{x}'_u,\overline{x}'_v)-(\overline{x}''_{uv},\overline{x}'_u,\overline{x}'_v)^2\right]\\ &= \frac{1}{(EG-F^2)^2}\left\{\begin{vmatrix}\boxed{\langle\overline{x}''_{uu},\overline{x}''_{vv}\rangle} & \langle\overline{x}''_{uu},\overline{x}'_u\rangle & \langle\overline{x}''_{uu},\overline{x}'_v\rangle\\ \langle\overline{x}'_u,\overline{x}''_{vv}\rangle & \langle\overline{x}'_u,\overline{x}'_u\rangle & \langle\overline{x}'_u,\overline{x}'_v\rangle\\ \langle\overline{x}'_v,\overline{x}''_{vv}\rangle & \langle\overline{x}'_v,\overline{x}'_u\rangle & \langle\overline{x}'_v,\overline{x}'_v\rangle\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}\boxed{\langle\overline{x}''_{uv},\overline{x}''_{uv}\rangle} & \langle\overline{x}''_{uv},\overline{x}'_u\rangle & \langle\overline{x}''_{uv},\overline{x}'_v\rangle\\ \langle\overline{x}'_u,\overline{x}''_{uv}\rangle & \langle\overline{x}'_u,\overline{x}'_u\rangle & \langle\overline{x}'_u,\overline{x}'_v\rangle\\ \langle\overline{x}'_v,\overline{x}''_{uv}\rangle & \langle\overline{x}'_v,\overline{x}'_u\rangle & \langle\overline{x}'_v,\overline{x}'_v\rangle\end{vmatrix}\right\}. \end{aligned}$$

Como elementos de los determinantes aparecen E, F y G, los símbolos $[ij,k]$ y $\langle\overline{x}''_{uu},\overline{x}''_{vv}\rangle$ y también $\langle\overline{x}''_{uv},\overline{x}''_{uv}\rangle$ y tenemos, utilizando una trivial propiedad de la suma de determinantes, que

$$K=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\left\{\begin{vmatrix}\square & [11,1] & [11,2]\\ [22,1] & E & F\\ [22,2] & F & G\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}0 & [12,1] & [12,2]\\ [12,1] & E & F\\ [12,2] & F & G\end{vmatrix}\right\}.$$

Calculemos ahora

$$\square=\langle\overline{x}''_{uu},\overline{x}''_{vv}\rangle-\langle\overline{x}''_{uv},\overline{x}''_{uv}\rangle.$$

Sabemos que $\langle\overline{x}'_u,\overline{x}''_{vv}\rangle=[22,1]=F'_v-\frac12 G'_u$, por lo que derivando esta ultima expresión respecto de u tendremos $\langle\overline{x}''_{uu},\overline{x}''_{vv}\rangle+\langle\overline{x}'_u,\overline{x}'''_{v^2u}\rangle=F''_{vu}-\frac12 G''_{uu}$. También se cumple que $\langle\overline{x}'_u,\overline{x}''_{uv}\rangle=[12,1]=\frac12 E'_v$, luego derivando respecto de v resulta que $\langle\overline{x}''_{uv},\overline{x}''_{uv}\rangle+$

[110]Recuérdese que $e=\langle\overline{x}''_{u^2},\overline{N}\rangle=\langle\overline{x}''_{u^2},\frac{\overline{x}'_u\times\overline{x}'_v}{\sqrt{EG-F^2}}\rangle=\frac{(\overline{x}''_{u^2},\overline{x}'_u,\overline{x}'_v)}{\sqrt{EG-F^2}}$, etc.,

$\langle \overline{x}'_u, \overline{x}'''_{uv^2}\rangle = \frac{1}{2}E''_{vv}$. Como se tiene que $\overline{x}'''_{uv^2} = \overline{x}'''_{v^2u}$ y $F''_{vu} = F''_{uv}$. Sumando y restando $\langle \overline{x}'_u, \overline{x}'''_{uv^2}\rangle$ en la expresión que deseamos calcular, se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle \overline{x}''_{uu}, \overline{x}''_{vv}\rangle - \langle \overline{x}''_{uv}, \overline{x}''_{uv}\rangle &= \langle \overline{x}''_{uu}, \overline{x}''_{vv}\rangle + \langle \overline{x}'_u, \overline{x}'''_{uv^2}\rangle - \langle \overline{x}'_u, \overline{x}'''_{uv^2}\rangle - \langle \overline{x}''_{uv}, \overline{x}''_{uv}\rangle \\
&= \frac{\partial}{\partial u}[22,1] - \frac{\partial}{\partial v}[12,1] \\
&= -\frac{1}{2}E''_{vv} + F''_{uv} - \frac{1}{2}G''_{uu}.
\end{aligned}$$

De donde resulta el término recuadrado, para los restantes términos del determinante basta con substituir los valores obtenidos en la página 83. □

Observación 3.12. *La primera fórmula de Brioschi es más fácil de memorizar como*

$$K = \frac{1}{(EG-F^2)^2}\left\{\begin{vmatrix} \langle \overline{x}''_{u^2}, \overline{x}''_{v^2}\rangle & [11,1] & [11,2] \\ [22,1] & E & F \\ [22,2] & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \langle \overline{x}''_{uv}, \overline{x}''_{vu}\rangle & [12,1] & [12,2] \\ [12,1] & E & F \\ [12,2] & F & G \end{vmatrix}\right\}.$$

Observación 3.13. *La fórmula de Brioschi nos proporcionará la segunda manera de probar el teorema egregium. Pero las fórmulas (81) y (82) son interesantes por si mismas. Nótese que basta con conocer solo E, F y G sin mención alguna a $\overline{N}$. Permiten calcular la curvatura gaussiana de variedades de dimensión 2, sumergidas, por ejemplo en $\mathbb{R}^n$ como en el ejemplo siguiente con $n = 4$; o K en el caso de las llamadas superficies* abstractas[111], *disco de Poincaré , hipersuperficie abstracta de Riemann, etc., ver capítulo 14 de [3].*

Ejercicio 3.5. Probar que las curvaturas gaussianas de $\overline{x}(u,v) = [u, v, uv, (u^2 - v^2)/2]$ y $\overline{x}(u,v) = [\cosh(u)\cos(v), \cosh(u)\sin(v), \sinh(u)\cos(v), \sinh(u)\sin(v)]$, son respectivamente $K = -2/(1+u^2+v^2)^3$ y $K = -2/(\cosh(2u))^3$. Nótese que para ambas $\overline{x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$. Ambas definen sendas superficies en $\mathbb{R}^4$, la primera se conoce como *doble silla* y la segunda es conforme y por tanto regular.

Corolario 3.7. *Si $F = 0$, entonces la fórmula de Brioschi pasa a ser*

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G'_u}{\sqrt{EG}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E'_v}{\sqrt{EG}}\right)\right]. \tag{82}$$

Dem. Se procede al contrario, derivamos en la fórmula a la que deseamos llegar y tenemos

$$\begin{aligned}
K &= \frac{-1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G'_u}{\sqrt{EG}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E'_v}{\sqrt{EG}}\right)\right) \\
&= \frac{-1}{2EG}(E''_{vv} + G''_{uu}) + \frac{1}{4EG}\left(\frac{(E'_v)^2}{E} + \frac{E'_vG'_v}{G} + \frac{(G'_u)^2}{G} + \frac{E'_uG'_u}{E}\right).
\end{aligned}$$

[111]El disco de Poincaré es $M = \{(u,v)|u^2 + v^2 < 4k^2\}$, $k > 0$ y con la métrica $ds^2 = 1/\gamma(u,v)(du^2 + dv^2)$ siendo $\gamma(u,v) = 1 - (u^2+v^2)/(4k^2)$. La hipersuperficie de Riemann tiene la métrica $ds^2 = (F(u_1,\ldots,u_n))^{-2}(du_1^2 + du_2^2 + \ldots + du_n^2)$, con $F(u_1,\ldots,u_n) = 1 + \frac{a}{4}\sum_{k=1}^n u_k^2$, con $a \in \mathbb{R}$, y resulta ser una superficie de curvatura constante a. Si $a = -1$ y $n = 3$, obtenemos un modelo de la geometría no Euclídea de Bolyai-Lobachesvskii .

Si hacemos $F = 0$ en (81), queda

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{(EG-F^2)^2}\left\{ \begin{vmatrix} \boxed{-\dfrac{1}{2}E''_{vv} - \dfrac{1}{2}G''_{uu}} & \frac{1}{2}E'_u & -\frac{1}{2}E'_v \\ F'_v - \frac{1}{2}G'_u & E & 0 \\ \frac{1}{2}G'_v & 0 & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E'_v & \frac{1}{2}G'_u \\ \frac{1}{2}E'_v & E & 0 \\ \frac{1}{2}G'_u & 0 & G \end{vmatrix} \right\} \\
&= \frac{1}{(EG)^2}\left[\frac{-1}{2}(E''_{vv} + G''_{uu})EG + \frac{1}{4}(E'_u G'_u G) + \frac{1}{4}(E'_v G'_v E) \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{4}(E'_v)^2 G + \frac{1}{4}(G'_u)^2 E \right],
\end{aligned}$$

vemos que efectivamente se da la igualdad con la fórmula que resulta tras hacer las derivadas indicadas en la fórmula del enunciado. $\square$

3.6 La ecuación diferencial de las geodésicas y el teorema de Clairaut

Con las herramientas obtenidas en la sección anterior proseguimos el estudio de las geodésicas.

Proposición 3.7. *La fórmula (58) utilizando los símbolos de Christoffel de segunda especie, queda en la forma*

$$\begin{aligned}
\frac{\kappa_g}{\sqrt{EG-F^2}} &= (u')^3\Gamma^2_{11} + (u')^2 v' \left(2\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}\right) + u'(v')^2\left(\Gamma^2_{22} - 2\Gamma^1_{12}\right) \\
&\quad -(v')^3\Gamma^1_{22} + u'v'' - u''v'.
\end{aligned}$$

Todas las derivadas lo son respecto del parámetro arco, y en los coeficientes y símbolos hay que ponerlo todo en función del arco.

Dem. Recordemos que partimos de

$$\begin{aligned}
\kappa_g &= \langle \overline{x}'_u \times \overline{x}''_{uu}, \overline{N}\rangle (u'(s))^3 + \left[\langle 2\overline{x}'_u \times \overline{x}''_{uv}, \overline{N}\rangle + \langle \overline{x}'_v \times \overline{x}''_{uu}, \overline{N}\rangle\right](u'(s)^2 v'(s)) \\
&\quad + \left[\langle \overline{x}'_u \times \overline{x}''_{vv}, \overline{N}\rangle + \langle 2\overline{x}'_v \times \overline{x}''_{uv}, \overline{N}\rangle\right](u'(s)v'(s)^2) + \langle \overline{x}'_v \times \overline{x}''_{vv}, \overline{N}\rangle (v'(s))^3 \\
&\quad + \langle \overline{x}'_u \times \overline{x}'_v, \overline{N}\rangle \left[u'(s)v''(s) - u''(s)v'(s)\right]. \qquad (83)
\end{aligned}$$

Utilizando la identidad de Lagrange se cumple que

$$\begin{aligned}
\langle \overline{x}'_u \times \overline{x}''_{uu}, \overline{N}\rangle &= \frac{\langle \overline{x}'_u \times \overline{x}''_{uu}, \overline{x}'_u \times \overline{x}'_v\rangle}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{\begin{vmatrix} \langle \overline{x}'_u, \overline{x}'_u\rangle & \langle \overline{x}'_u, \overline{x}'_v\rangle \\ \langle \overline{x}''_{uu}, \overline{x}'_u\rangle & \langle \overline{x}''_{uu}, \overline{x}'_v\rangle \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}} \\
&= \frac{E\,[11,2] - F\,[11,1]}{\sqrt{EG-F^2}} = \sqrt{EG-F^2}\left(\frac{E}{EG-F^2}[11,2] - \frac{F}{EG-F^2}[11,1]\right) \\
&= \sqrt{EG-F^2}\,\Gamma^2_{11}.
\end{aligned}$$

que $\Gamma^r_{ij} = [ij,k]g^{kr}$, y sabemos que

$$g^{11} = \frac{G}{EG-F^2}, \quad g^{12} = g^{21} = \frac{-F}{EG-F^2}, \quad g^{22} = \frac{E}{EG-F^2}.$$

Analogamente

$$\begin{aligned}
\langle \overline{x}'_u \times \overline{x}''_{uv}, \overline{N}\rangle &= \frac{\langle \overline{x}'_u \times \overline{x}''_{uv}, \overline{x}'_u \times \overline{x}'_v\rangle}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{E[12,2]-F[12,1]}{\sqrt{EG-F^2}} = \Gamma^2_{12}\sqrt{EG-F^2},\\
\langle \overline{x}'_v \times \overline{x}''_{u^2}, \overline{N}\rangle &= \frac{\langle \overline{x}'_v \times \overline{x}''_{u^2}, \overline{x}'_u \times \overline{x}'_v\rangle}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{F[11,2]-G[11,1]}{\sqrt{EG-F^2}} = -\Gamma^1_{11}\sqrt{EG-F^2},\\
\langle \overline{x}'_u \times \overline{x}''_{vv}, \overline{N}\rangle &= \frac{\langle \overline{x}'_u \times \overline{x}''_{v^2}, \overline{x}'_u \times \overline{x}'_v\rangle}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{E[22,2]-F[22,1]}{\sqrt{EG-F^2}} = \Gamma^2_{22}\sqrt{EG-F^2},\\
\langle \overline{x}'_v \times \overline{x}''_{uv}, \overline{N}\rangle &= \frac{\langle \overline{x}'_v \times \overline{x}''_{uv}, \overline{x}'_u \times \overline{x}'_v\rangle}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{F[12,2]-G[12,1]}{\sqrt{EG-F^2}} = -\Gamma^1_{12}\sqrt{EG-F^2},\\
\langle \overline{x}'_v \times \overline{x}''_{v^2}, \overline{N}\rangle &= \frac{\langle \overline{x}'_v \times \overline{x}''_{v^2}, \overline{x}'_u \times \overline{x}'_v\rangle}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{F[22,2]-G[22,1]}{\sqrt{EG-F^2}} = -\Gamma^1_{22}\sqrt{EG-F^2},\\
\langle \overline{x}'_u \times \overline{x}'_v, \overline{N}\rangle &= \sqrt{EG-F^2}.
\end{aligned}$$

Substituyendo todas estas identidades en (83), resulta la fórmula del enunciado. □

Proposición 3.8. *Las geodésicas satisfacen la siguiente ecuación,*

$$\begin{aligned}
u''v' - u'v'' = \Gamma^2_{11}(u')^3 + (2\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11})(u')^2 v' \\
+ (\Gamma^2_{22} - 2\Gamma^1_{12})u'(v')^2 - \Gamma^1_{22}(v')^3,
\end{aligned}$$

incluso si la derivación es respecto de un parámetro arbitrario

Dem. Si en la proposición 3.7 hacemos $\kappa_g = 0$, como $\sqrt{EG-F^2} > 0$ y tomamos una variable intermedia t podemos escribir

$$\frac{du}{ds} = \frac{du}{dt}\frac{dt}{ds}, \quad \frac{dv}{ds} = \frac{dv}{dt}\frac{dt}{ds} \quad \Rightarrow$$
$$\frac{d^2u}{ds^2} = \frac{d^2u}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{du}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}, \quad \frac{d^2v}{ds^2} = \frac{d^2v}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{dv}{dt}\frac{d^2t}{ds^2}.$$

El término de la izquierda en la fórmula del enunciado pasa a ser tras la cancelación

$$\frac{du}{ds}\frac{d^2v}{ds^2} - \frac{dv}{ds}\frac{d^2u}{ds^2} = \left[\frac{du}{dt}\frac{d^2v}{dt^2} - \frac{dv}{dt}\frac{d^2u}{dt^2}\right]\left(\frac{dt}{ds}\right)^3,$$

y substituyendo en todos los sumandos de la derecha se saca tanto en la derecha como en la izquierda $(dt/ds)^3$ factor común, cancelándolo, todo queda en derivadas respecto de t. Luego la ecuación del enunciado continua siendo válida aunque la derivación sea respecto de un parámetro arbitrario t. □

Observación 3.14. *El anterior corolario muestra que κ_g solo depende de E, F y G, de sus primeras derivadas y de u', u'', v' y v'', es decir: la curvatura geodésica o tangencial es invariante respecto de las flexiones. Dicho de otro modo el ser geodésica o no es una propiedad intrínseca de la superficie[112]. Este resultado se conoce como teorema de Minding.*

[112]Su importancia en la teoría de la relatividad es patente, ya que la trayectoria de una rayo de luz sigue una geodésica en el espacio-tiempo . Estas geodésicas se deforman de acuerdo con la curvatura de la variedad. De ahí la identificación entre gravedad y curvatura en el espacio-tiempo. La curvatura en espacios de dimensión superior tiene carácter tensorial. Concretamente si la variedad tiene n grados de libertad, entonces la curvatura es un tensor de $n^2(n^2-1)/12$ componentes. Para $n = 2$, caso que nos ocupa, resulta $(4 \cdot 3)/12 = 1$, es decir el tensor es un escalar.

Proposición 3.9. *Las curvaturas geodésicas de las curvas coordenadas son*

$$
\begin{aligned}
(\kappa_g)_{u=cte.} &= -\Gamma_{22}^1 \frac{\sqrt{EG-F^2}}{G\sqrt{G}}, \quad si \quad F=0 \;\Rightarrow\; (\kappa_g)_{u=cte.} = \frac{G'_u}{2G\sqrt{E}}. \\
(\kappa_g)_{v=cte.} &= \Gamma_{11}^2 \frac{\sqrt{EG-F^2}}{E\sqrt{E}}, \qquad si \quad F=0 \;\Rightarrow\; (\kappa_g)_{v=cte.} = -\frac{E'_v}{2E\sqrt{G}}
\end{aligned}
$$

Dem. Sabemos que

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

Haciendo $u =$ cte. obtenemos $ds^2 = Gdv^2$, es decir $ds = \sqrt{G}dv$, o lo que es lo mismo, $v'(s) = 1/\sqrt{G}$ y además $u' = u'' = 0$, y substituyendo en la proposición 3.7 resulta la primera de las fórmulas del enunciado. Análogamente haciendo $v =$ cte., obtenemos que $ds = \sqrt{E}du$ y $v' = v'' = 0$, es decir $u'(s) = 1/\sqrt{E}$, y volviendo a utilizar el resultado de 3.7 obtenemos la segunda fórmula del enunciado. Si $F = 0$ sabemos que $\Gamma_{22}^1 = \frac{-1}{2E}G'_u$ y también que $\Gamma_{11}^2 = \frac{-1}{2G}E'_v$ y simplificando resultan las otras dos fórmulas del enunciado. □

Ejercicio 3.6. Dada la esfera $\overline{x}(u,v) = [r\cos(u)\cos(v), r\cos(u)\sin(v), r\sin(u)]$, estudiar la curvatura geodésica de meridianos y paralelos ¿Para que latitud la curvatura geodésica de un paralelo es máxima y/o mínima?. Estudiar la curvatura geodésica de las curvas paramétricas para las parametrizaciones habituales del cilindro y del cono.

Proposición 3.10. *(Las geodésicas en su forma más habitual)*
Las líneas geodésicas satisfacen las ecuaciones diferenciales

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2u}{ds^2} + \Gamma_{11}^1\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\Gamma_{12}^1\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \Gamma_{22}^1\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 &= 0, \\
\frac{d^2v}{ds^2} + \Gamma_{11}^2\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\Gamma_{12}^2\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \Gamma_{22}^2\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 &= 0,
\end{aligned}
$$

con la notación tensorial

$$u''_m + u'_i u'_j\,\Gamma_{ij}^m = 0, \qquad m = 1,2.$$

Dem. Como sabemos que a lo largo de las geodésicas $\overline{N} = \pm\overline{n}$, tenemos que se cumplen

$$\langle \overline{n}, \overline{x}'_u\rangle = 0, \qquad \langle \overline{n}, \overline{x}'_v\rangle = 0,$$

o lo que es lo mismo (recuérdese que en $\overline{t}' = \kappa\overline{n}$ la derivación es respecto a s),

$$\langle \overline{t}', \overline{x}'_u\rangle = 0, \qquad \langle \overline{t}', \overline{x}'_v\rangle = 0. \tag{84}$$

Utilizando ahora la anteriormente calculada

$$
\begin{aligned}
\overline{t}'(s) &= \overline{x}''_{uu}(u'(s))^2 + +\overline{x}''_{uv}u'(s)v'(s) + \overline{x}'_u u''(s) + \\
&\quad \overline{x}''_{vu}v'(s)u'(s) + \overline{x}''_{vv}(v'(s))^2 + \overline{x}'_v v''(s).
\end{aligned}
$$

Tendremos que las fórmulas (84) se transforman en

$$
\begin{aligned}
\langle \overline{x}''_{uu}, \overline{x}'_u\rangle (u')^2 + 2\langle \overline{x}''_{uv}, \overline{x}'_u\rangle u'v' + \langle \overline{x}''_{vv}, \overline{x}'_u\rangle (v')^2 + Eu'' + Fv'' &= 0, \\
\langle \overline{x}''_{uu}, \overline{x}'_v\rangle (u')^2 + 2\langle \overline{x}''_{uv}, \overline{x}'_v\rangle u'v' + \langle \overline{x}''_{vv}, \overline{x}'_v\rangle (v')^2 + Fu'' + Gv'' &= 0
\end{aligned}
$$

que podemos reescribir como

$$\begin{aligned}
[11,1](u')^2 + 2\,[12,1]u'v' + [22,1](v')^2 + Eu'' + Fv'' &= 0,\\
[11,2](u')^2 + 2\,[12,2]u'v' + [22,2](v')^2 + Fu'' + Gv'' &= 0.
\end{aligned}$$

Seguiremos la demostración utilizando la notación tensorial. El anterior par de ecuaciones se escribirían

$$[ij,k]\; u_i' u_j' + g_{kj}\; u_j'' = 0, \quad r = 1,2.$$

Sabemos que $\Gamma_{ij}^m = [ij,k]g^{km}$. Multiplicando por g^{km}, y como $g_{kj}g^{km}u_j'' = \delta_{jm}u_j'' = u_m''$, finalmente queda

$$u_m'' + u_i'u_j'\;\Gamma_{ij}^m = 0, \qquad m = 1,2.$$

que son las ecuaciones del enunciado. □

Observación 3.15. *Podría parecer extraño que una sola condición $\kappa_g = 0$ diera lugar a las dos ecuaciones de la proposición 3.10, pensemos sin embargo que están ligadas por la relación $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$.*

Ejemplo 3.9. *Las expresiones analíticas anteriores nos permiten determinar de modo inmediato las geodésicas del plano. El elemento de línea en el plano es $ds^2 = du^2 + dv^2$, es decir $F = 0$, y $E = G = 1$. Por tanto todos los símbolos de Christoffel son nulos y las ecuaciones se convierten en*

$$u'' = 0, \quad v'' = 0.$$

Trivialmente integrables como $u' = a_1$ y $v' = a_2$, y $u = a_1s + b_1$, $v = a_2s + b_2$, ecuaciones paramétricas de una recta, que es la geodésica en el plano.

Ejemplo 3.10. *Sea $[\lambda(u), \mu(u)]$ una curva definida en el plano OXZ, si la hacemos girar en torno al eje OZ, tenemos la superficie*

$$\overline{x}(u,v) = [\lambda(u)\cos(v), \lambda(u)\sin(v), \mu(u)].$$

Calculemos en primer lugar E, F y G. Tendremos

$$\begin{aligned}
\overline{x}_u' &= [\lambda'(u)\cos v, \lambda'(u)\operatorname{sen} v, \mu'(u)]\\
\overline{x}_v' &= [-\lambda(u)\operatorname{sen} v, \lambda(u)\cos v, 0].
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
E &= \langle \overline{x}_u', \overline{x}_u'\rangle = \lambda'(u)^2\cos^2 v + \lambda'(u)^2\operatorname{sen}^2 v + \mu'(u)^2 = \lambda'(u)^2 + \mu'(u)^2,\\
F &= \langle \overline{x}_u', \overline{x}_v'\rangle = 0,\\
G &= \langle \overline{x}_v', \overline{x}_v'\rangle = \lambda(u)^2\operatorname{sen}^2 v + \lambda(u)^2\cos^2 v = \lambda(u)^2.
\end{aligned}$$

Como $F = 0$, los símbolos de Christoffel serán

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{E_u'}{2E} & \Gamma_{11}^2 &= -\frac{E_v'}{2G}\\
\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 &= \frac{E_v'}{2E} & \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 &= \frac{G_u'}{2G}\\
\Gamma_{22}^1 &= -\frac{G_u'}{2E} & \Gamma_{22}^2 &= \frac{G_v'}{2G}.
\end{aligned}$$

Luego tendremos por un lado

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\lambda'(u)\lambda''(u) + \mu'(u)\mu''(u)}{\lambda'(u)^2 + \mu'(u)^2}, \qquad \Gamma_{12}^2 = \frac{\lambda'(u)}{\lambda(u)}, \qquad \Gamma_{22}^1 = -\frac{\lambda(u)\lambda'(u)}{\lambda'(u)^2 + \mu'(u)^2}. \tag{85}$$

y por otro $\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{12}^1 = 0$*. Luego las ecuaciones diferenciales serán*

$$\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{\lambda'(u)\mu''(u) + \lambda''(u)\mu'(u)}{\lambda'(u)^2 + \mu'(u)^2}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 - \frac{\lambda(u)\lambda'(u)}{\lambda'(u)^2 + \mu'(u)^2}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 0, \tag{86}$$

$$\frac{d^2v}{ds^2} + 2\frac{\lambda'(u)}{\lambda(u)}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} = 0. \tag{87}$$

Podemos proseguir analíticamente, aunque las conclusiones que obtendremos se podrían obtener directamente de la definición. No obstante (89)es interesante en si misma.

Empecemos por (87), pues parece más sencilla que (86), tendremos

$$\frac{v''(s)}{v'(s)} + 2\frac{\lambda'(u)}{\lambda(u)}\frac{du}{ds} = 0.$$

Luego integrando queda

$$\frac{d}{ds}\ln v'(s) + \frac{d}{ds}\ln\lambda(u)^2 = \frac{d}{ds}\ln(c) \quad\Rightarrow\quad v'(s) = \frac{c}{\lambda(u)^2} \quad\Rightarrow\quad \lambda(u)^2 dv = c\, ds.$$

Remarquemos la fórmula obtenida que utilizaremos luego en el teorema de Clairaut.

$$v'(s)\lambda(u)^2 = c. \tag{88}$$

Elevando al cuadrado y utilizando el valor de ds^2 *en este caso queda*

$$\lambda(u)^4 dv^2 = c^2\left(\lambda'(u)^2 + \mu'(u)^2)du^2 + \lambda(u)^2 dv^2\right).$$

de donde

$$\lambda(u)^2(\lambda(u)^2 - c^2)dv^2 = c^2(\lambda'(u)^2 + \mu'(u)^2)du^2,$$

extrayendo la raíz cuadrada, despejando v*, y aplicando el teorema fundamental del cálculo, resulta*

$$v(u) = \pm c\int_{u_0}^{u}\frac{\sqrt{\lambda'(t)^2 + \mu'(t)^2}}{\lambda(t)\sqrt{\lambda(t)^2 - c^2}}\,dt + v(u_0). \tag{89}$$

Si $c = 0$ *esta ecuación nos proporciona* $v(u) = v(u_0) =$ *cte. que es un meridiano. Los meridianos son pues geodésicas.*

Por otro lado si consideramos $u =$ *cte., es decir un paralelo, y substituimos en (87) obtenemos que* $v'' = 0$*, en consecuencia* $v' =$ *cte. La ecuación (86) se convierte ahora en*

$$\frac{\lambda(u)\lambda'(u)}{\lambda'(u)^2 + \mu'(u)^2}\,(v')^2 = 0.$$

Con objeto de que el paralelo sea geodésica, es necesario que $v' \neq 0$*; y como* $\lambda'(u)^2 + \mu'(u)^2 \neq 0$*, por ser la primera forma definida positiva, y* $\lambda(u) \neq 0$*, lo que implicaría corte con el eje de revolución, se tiene que cumplir que* $\lambda'(u) = 0$*.*

Esto hay que interpretarlo como que dicho paralelo es generado por un punto de la curva generatriz cuya tangente solo tenga componente vertical, es decir $[\lambda'(u), \mu'(u)] = [0, \mu']$*, o lo que es lo mismo que dicha tangente sea paralela al eje de revolución.*

Esta condición es claramente suficiente, puesto que la normal al paralelo coincide con la normal a la superficie. Establezcamos estas propiedades mediante una proposición.

Proposición 3.11. *Dada una superficie de revolución se cumplen:*

i) Todos los meridianos son siempre geodésicas.

ii) Los únicos paralelos que son geodésicas son aquellos que en los puntos de intersección con los meridianos tienen la tangente al meridiano paralela[113] *al eje de revolución.*

Ejemplo 3.11. *Un ejemplo de paralelos que son geodésicas son el ecuador en la esfera, o los paralelos internos y externos del toro, no así los paralelos superior e inferior. En el cono no hay paralelos que sean geodésicas por contra de lo que ocurre en el cilindro en el que todos los paralelos son geodésicas, etc., etc.*

El siguiente teorema nos proporciona una mayor información sobre las geodésicas de las superficies de revolución. Estos resultados podrían extenderse (ver [11], pág. 353) a las superficies, entre las que están las de revolución, con una primera forma tal que $F = 0$ y E y G solo dependen de u o de v, pero no de ambas. A una parametrización de este tipo se la denomina parametrización de Clairaut.

Teorema 3.9. *(Teorema de Clairaut)*

Dada una superficie de revolución parametrizada como

$$\overline{x}(u,v) = [\lambda(u)\cos(v), \lambda(u)\sin v, \mu(u)],$$

si llamamos θ al ángulo que la tangente a una geodésica forma con el paralelo de radio $\lambda(u)$ entonces

$$\lambda(u)\cos\theta = c = cte.$$

Dem. Hemos visto que para una superficie de revolución las geodésicas satisfacen (88), es decir

$$v'(s)\lambda(u)^2 = \text{cte.} = c.$$

El ángulo entre dos direcciones sobre una superficie viene dado por

$$\cos\theta = \frac{Edu\delta u + (Fdu\delta v + Fdv\delta u) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}},$$

si hacemos $u =$ cte, es decir un paralelo, resultará $\delta u = 0$, y tendremos

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{Fdu\delta v + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{G\delta v^2}}\\ &= \frac{Fdu + Gdv}{\sqrt{G}\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}}.\end{aligned}$$

Además $F = 0$, luego

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{G}dv}{\sqrt{Edu^2 + Gdv^2}}.$$

Teniendo en cuenta que la parametrización es respecto al arco

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{G}\ v'(s)}{\sqrt{Eu'(s)^2 + Gv'(s)^2}}.$$

[113] Resulta trivial probar que si la tangente al meridiano es perpendicular al eje, entonces $\kappa_g = \kappa$. Entendiendo por κ la curvatura ordinaria del paralelo en cuestion.

Hemos visto que $G = \lambda'(u)^2$, luego multiplicando por $\lambda(u)$

$$\lambda(u)\cos(\theta) = \frac{\lambda(u)^2\, v'(s)}{\sqrt{Eu'(s)^2 + Gv'(s)^2}} = \frac{c}{\sqrt{Eu'(s)^2 + Gv'(s)^2}}. \tag{90}$$

Veamos ahora que el denominador vale justamente la unidad. En efecto, si consideramos un vector $\overline{t}$ tangente a la geodésica, utilizando las ecuaciones

$$\overline{t}(s) = \frac{d\overline{x}}{ds} = \overline{x}'_u u'(s) + \overline{x}'_v v'(s),$$

este vector es tal que su módulo al cuadrado, presuponiendo $F = 0$ que es el caso, vale

$$\begin{aligned} \langle \overline{t}(s), \overline{t}(s)\rangle &= \langle \overline{x}'_u, \overline{x}'_v\rangle u'(s)^2 + \langle \overline{x}'_v, \overline{x}'_v\rangle v'(s)^2, \\ &= Eu'(s)^2 + Gv'(s)^2. \end{aligned}$$

Pero sabemos que cuando expresamos $\overline{t}$ como $d\overline{x}/ds$, es decir respecto del arco, el vector tangente es unitario. Por tanto $\sqrt{Eu'(s)^2 + Gv'(s)^2} = 1$ y resulta que (90) queda

$$\lambda(u)\cos(\theta) = c.$$

En una superficie de revolución parametrizada en la forma

$$\overline{x}(u, v) = [\lambda(u)\cos(v), \lambda(u)\,\mathrm{sen}(v), \mu(u)],$$

el valor $\lambda(u)$ es el radio del paralelo para un u fijo, por lo que la ecuación anterior tiene una interpretación geométrica sencilla. □

Definición 3.10. *Al valor de la constante c asociado a cada geodésica de una superficie de revolución se le suele llamar* slant *de la geodésica. Obviamente los meridianos tienen* slant *nulo.*

Observación 3.16. *Nótese que conforme varia $\lambda(u)$, varia necesariamente θ, con objeto de mantener el producto $\lambda(u)\cos\theta$ constante. Cuando el cuello de la superficie de revolución se reduce a cero –caso del cono o del paraboloide– se llega a un valor u_0 para el que justamente $\theta = 0$, en el que la geodésica será tangente a un paralelo y rebotará contra él. El valor del radio para ese punto es $\lambda(u_0) = c$, y el paralelo es $[c\cos v, c\sin(v), \mu(u_0)]$, $v \in [0, 2\pi]$. El punto de tangencia vendrá dado por*[114] *$(u_0, v(u_0 + \epsilon))$.*

Obsérvese también que si la superficie de revolución tuviera cuello y el slant *fuera inferior al radio de ese cuello r_c, la geodésica no rebotaría contra ningún paralelo, lo que ocurre obviamente con las geodésicas espirales del cilindro, o a partir de las que inciden con el paralelo $\lambda(u)$ con un ángulo mayor o igual que $\theta_{\min}(u) = \arccos(r_c/\lambda(u))$.*

El siguiente resultado se puede omitir en una primera lectura.

Teorema 3.10. *(Ecuación diferencial de las líneas geodésicas) Dada una superficie $\overline{x}(u, v)$, $v = v(u)$ es ecuación de una geodésica, si y solo si,*

$$\frac{d^2v}{du^2} = \Gamma^1_{22}\left(\frac{dv}{du}\right)^3 + (2\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22})\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + (\Gamma^1_{11} - 2\Gamma^2_{12})\frac{dv}{du} - \Gamma^2_{11}.$$

[114] Obsérvese que como $\lambda(u_0) = c$ el denominador de la integral (89) es nulo, por eso hay que aproximarse por la derecha. Asimismo obsérvese que el signo $\pm$ nos indica que la geodésica vuelve a despegarse del paralelo, por lo que forma una especie de *lazo* que se autointersecciona sobre la superficie.

DEM. Lo más cómodo es hacer $v = v(u)$ y $u = u$, es decir tomar u como variable independiente en la proposición 3.8 con lo que tendríamos $u' = 1$ y $u'' = 0$. Por tanto quedaría

$$v'' \cdot 1 - 0 = -\Gamma_{11}^2 \cdot 1 - (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) \cdot 1 \cdot v' + (2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2) \cdot 1 \cdot (v')^2 + \Gamma_{22}^1 (v')^3,$$

que es la fórmula del enunciado.

Vamos a ver que llegamos a la misma expresión a partir de las ecuaciones de la proposición 3.10. En efecto como $\dfrac{dv}{ds} = \dfrac{dv}{du}\dfrac{du}{ds}$, substituimos en la segunda ecuación de la proposición 3.10 y tras multiplicar por du/ds resulta

$$0 = \frac{d^2v}{ds^2}\frac{du}{ds} + \Gamma_{11}^2 \left(\frac{du}{ds}\right)^3 + 2\Gamma_{12}^2 \frac{dv}{du}\left(\frac{du}{ds}\right)^3 + \Gamma_{22}^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2 \left(\frac{du}{ds}\right)^3,$$

dividiendo por $(du/ds)^3$, tenemos

$$\frac{\dfrac{d^2v}{ds^2}\dfrac{du}{ds}}{\left(\dfrac{du}{ds}\right)^3} = -\Gamma_{11}^2 - 2\Gamma_{12}\left(\frac{dv}{du}\right) - \Gamma_{22}^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2. \tag{91}$$

Por otro lado la primera ecuación de la proposición 3.10 queda, tras multiplicar por dv/ds y hacer $\dfrac{dv}{ds} = \dfrac{dv}{du}\dfrac{du}{ds}$, en la forma

$$0 = \frac{d^2u}{ds^2}\frac{dv}{ds} + \Gamma_{11}^1 \left(\frac{du}{ds}\right)^3 \left(\frac{dv}{du}\right) + 2\Gamma_{12}^1 \left(\frac{du}{ds}\right)^3 \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + \Gamma_{22}^1 \left(\frac{du}{ds}\right)^3 \left(\frac{dv}{du}\right)^3.$$

dividiendo de nuevo por $(du/ds)^3$, queda

$$-\frac{\dfrac{d^2u}{ds^2}\dfrac{dv}{ds}}{\left(\dfrac{du}{ds}\right)^3} = \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dv}{du}\right) + 2\Gamma_{12}^1 \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dv}{du}\right)^3. \tag{92}$$

Sumando (91) y (92) resulta[115]

$$\frac{d^2v}{du^2} = \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dv}{du}\right)^3 + (2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + (\Gamma_{11}^1 - 2\Gamma_{12}^2)\left(\frac{dv}{du}\right) - \Gamma_{11}^2,$$

que obviamente coincide con la arriba calculada. □

[115] Recuérdese del curso elemental de cálculo que suponiendo que las funciones $x = g(t)$ y $y = h(t)$ sean tales que permitan definir $y = f(x)$, es decir $f(x) \equiv (h \circ g^{-1})(x)$, entonces $f' = h'/g'$ y $f'' = (h''g' - g''h')/(g')^3$. Aplicando esto a $u = u(s) \equiv g(t)$ y $v = v(s) \equiv h(t)$, tenemos que $v''(u) = (v''(u^{-1}(s))u'(u^{-1}(s)) - u''(u^{-1}(s)v'(u^{-1}(s))/(u'(u^{-1}(s))^2$.

3.7 El teorema de Liouville y la fórmula de Bonnet para κ_g

Veamos un par de resultados importantes relacionados respectivamente con la curvatura geodésica y la propia definición de geodésica. El teorema de Liouville es necesario para demostrar el teorema de Gauss-Bonnet, y el segundo teorema sirve para conciliar nuestra primitiva idea de geodésica: *curva de la superficie que une dos puntos de ella haciendo mínima su distancia*, con la definición dada: *curva sobre la superficie tal que en todos sus puntos tiene curvatura geodésica nula*. Para probarlos precisamos el siguiente lema.

Lema 3.1. *Sea $\bar{t}$ un vector tangente a la curva $u = u(s)$, $v = v(s)$, y unitario, sobre la superficie $\overline{x}(u, v)$; entonces se cumple*

$$\kappa_g \sqrt{EG - F^2} = \frac{\partial}{\partial u} \langle \bar{t}, \overline{x}'_v \rangle - \frac{\partial}{\partial v} \langle \bar{t}, \overline{x}'_u \rangle.$$

Dem. Partimos de que

$$\begin{aligned} \bar{t} = \overline{x}'(s) = \frac{d}{ds}\, \overline{x}(u(s), v(s)) &= \overline{x}'_u \frac{du}{ds} + \overline{x}'_v \frac{dv}{ds}. \qquad (93) \\ \bar{t}'(s) = \frac{d}{ds}\, \overline{x}'(u(s), v(s)) &= \bar{t}'_u \frac{du}{ds} + \bar{t}'_v \frac{dv}{ds}. \qquad (94) \end{aligned}$$

La curvatura geodésica sabemos que viene dada por

$$\begin{aligned} \kappa_g &= (\bar{t}(s), \bar{t}'(s), \overline{N}(s)) = \langle \bar{t} \times \bar{t}', \overline{N} \rangle \\ &= \langle \bar{t} \times \bar{t}', \frac{\overline{x}'_u \times \overline{x}'_v}{\sqrt{EG - F^2}} \rangle. \end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \kappa_g \sqrt{EG - F^2} &= \langle \bar{t} \times \bar{t}', \overline{x}'_u \times \overline{x}'_v \rangle \\ &= \langle \bar{t} \times \left(\bar{t}'_u \frac{du}{ds} + \bar{t}'_v \frac{dv}{ds} \right), \overline{x}'_u \times \overline{x}'_v \rangle \\ &= \langle (\bar{t} \times \bar{t}'_u) \frac{du}{ds} + (\bar{t} \times \bar{t}'_v) \frac{dv}{ds}, \overline{x}'_u \times \overline{x}'_v \rangle \\ &= \langle (\bar{t} \times \bar{t}'_u) \frac{du}{ds}, \overline{x}'_u \times \overline{x}'_v \rangle + \langle (\bar{t} \times \bar{t}'_v) \frac{dv}{ds}, \overline{x}'_u \times \overline{x}'_v \rangle \\ &= \langle \bar{t} \times \bar{t}'_u, \left[(\overline{x}'_u \times \overline{x}'_v) \frac{du}{ds} \right] \rangle + \langle \bar{t} \times \bar{t}'_v, \left[(\overline{x}'_u \times \overline{x}'_v) \frac{dv}{ds} \right] \rangle \end{aligned}$$

Por otro lado, multiplicando vectorialmente (93) por $\overline{x}'_u$ y luego por $\overline{x}'_v$ y como obviamente $\overline{x}'_u \times \overline{x}'_u = 0$, etc., se cumplirá

$$\begin{aligned} \bar{t} \times \overline{x}'_u &= \overline{x}'_v \frac{dv}{ds} \times \overline{x}'_u = -(\overline{x}'_u \times \overline{x}'_v) \frac{dv}{ds}, \\ \bar{t} \times \overline{x}'_v &= \overline{x}'_u \frac{du}{ds} \times \overline{x}'_v = (\overline{x}'_u \times \overline{x}'_v) \frac{du}{ds}. \end{aligned}$$

Substituyendo los términos de la derecha en la expresión de la curvatura geodésica queda

$$\begin{aligned} \kappa_g \sqrt{EG - F^2} &= \langle \bar{t} \times \bar{t}'_u, \bar{t} \times \overline{x}'_v \rangle + \langle \bar{t} \times \bar{t}'_v, -(\bar{t} \times \overline{x}'_u) \rangle \\ &= \langle \bar{t} \times \bar{t}'_u, \bar{t} \times \overline{x}'_v \rangle - \langle \bar{t} \times \bar{t}'_v, \bar{t} \times \overline{x}'_u \rangle. \end{aligned}$$

Utilizando dos veces la identidad de Lagrange y teniendo en cuenta que $\langle \overline{t}, \overline{t} \rangle) = 1$, la expresión anterior queda

$$\begin{aligned}
\langle \overline{t} \times \overline{t}'_u, \overline{t} \times \overline{x}'_v \rangle - \langle \overline{t} \times \overline{t}'_v, \overline{t} \times \overline{x}'_u \rangle &= \begin{vmatrix} \langle \overline{t}, \overline{t} \rangle & \langle \overline{t}, \overline{x}'_v \rangle \\ \langle \overline{t}'_u, \overline{t} \rangle & \langle \overline{t}'_u, \overline{x}'_v \rangle \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \langle \overline{t}, \overline{t} \rangle & \langle \overline{t}, \overline{x}'_u \rangle \\ \langle \overline{t}'_v, \overline{t} \rangle & \langle \overline{t}'_v, \overline{x}'_u \rangle \end{vmatrix} \\
&= \langle \overline{t}'_u, \overline{x}'_v \rangle - \langle \overline{t}'_v, \overline{x}'_u \rangle \\
&\quad + \Big[\langle \overline{t}, \overline{x}'_u \rangle \langle \overline{t}'_v, \overline{t} \rangle - \langle \overline{t}, \overline{x}'_v \rangle \langle \overline{t}'_u, \overline{t} \rangle \Big].
\end{aligned}$$

La cantidad entre corchetes es nula. En efecto, si derivamos respecto de u, la identidad obvia $\langle \overline{t}, \overline{t} \rangle = 1$, resulta que $2\langle \overline{t}, \overline{t}'_u \rangle = 0$, es decir $\langle \overline{t}, \overline{t}'_u \rangle = 0$. Del mismo modo derivando $\langle \overline{t}, \overline{t} \rangle = 1$ respecto de v, obtenemos que $\langle \overline{t}, \overline{t}'_v \rangle = 0$. Luego hemos llegado a

$$\kappa_g \sqrt{EG - F^2} = \langle \overline{t}'_u, \overline{x}'_v \rangle - \langle \overline{t}'_v, \overline{x}'_u \rangle. \tag{95}$$

Sabemos también que por el teorema de Schwarz se cumple $\langle \overline{t}, \overline{x}''_{vu} \rangle = \langle \overline{t}, \overline{x}''_{uv} \rangle$, sumando y restando esta cantidad en el miembro derecho de (95) resulta finalmente

$$\begin{aligned}
\kappa_g \sqrt{EG - F^2} &= \langle \overline{t}'_u, \overline{x}'_v \rangle + \langle \overline{t}, \overline{x}''_{vu} \rangle \\
&\quad - (\langle \overline{t}'_v, \overline{x}'_u \rangle + \langle \overline{t}, \overline{x}''_{uv} \rangle) \\
&= \frac{\partial}{\partial u} \langle \overline{t}, \overline{x}'_v \rangle - \frac{\partial}{\partial v} \langle \overline{t}, \overline{x}'_u \rangle.
\end{aligned} \tag{96}$$

□

Observación 3.17. *Habitualmente la parametrización de una curva y por tanto su tangente nunca viene dada por el arco. En consecuencia para aplicar el anterior teorema hay que considerar* $\overline{t}/\|\overline{t}\|$*,*

Teorema 3.11. *(Teorema de Liouville)*

A lo largo de la curva $\overline{y}(s) = \overline{x}(u(s), v(s))$ *con tangente unitaria, sobre la superficie* $\overline{x}(u, v)$*, se cumple*

$$\kappa_g(s) = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[G'_u \frac{dv}{ds} - E'_v \frac{du}{ds} \right] + \frac{d\theta}{ds},$$

donde θ *es el ángulo que la tangente a la curva forma con* $v =$ *cte. (es decir con* $\overline{x}'_u$*).*

Dem. Veamos un par de demostraciones. La primera se basa en el lema 3.1, la segunda es más autocontenida.

Primer método:

Escojamos en primer lugar un sistema de curvas paramétricas ortogonal. En consecuencia $F = 0$, pero además sabemos que $\|\overline{x}'_u\| = \sqrt{E}$, no olvidemos que $\langle \overline{x}'_u, \overline{x}'_u \rangle = E$, y de modo análogo $\|\overline{x}'_v\| = \sqrt{G}$. Por tanto

$$\langle \overline{t}, \overline{x}'_u \rangle = 1 \cdot \sqrt{E} \cdot \cos\theta, \qquad \langle \overline{t}, \overline{x}'_v \rangle = 1 \cdot \sqrt{G} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sqrt{G}\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Nótese que θ es el ángulo que forma $\overline{t}$ con $\overline{x}'_u$, que obviamente es tangente a la curva paramétrica $v =$ cte. En consecuencia, para aplicar el lema 3.1, interesará calcular

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{G}\,\mathrm{sen}\,\theta) - \frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{E}\cos\theta) &= \frac{G'_u}{2\sqrt{G}}\,\mathrm{sen}\,\theta + \sqrt{G}\cos\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial u} \\
&\quad - \frac{E'_v}{2\sqrt{E}}\cos\theta + \sqrt{E}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial v}.
\end{aligned} \tag{97}$$

Vimos en la demostración del teorema de Euler, pág. 73, que si la dirección dv/du, que en este caso es la de $\bar{t}$, forma un ángulo θ con la curva paramétrica $v = \text{cte}$, como $\delta v = 0$ y $F = 0$, tenemos

$$\cos\theta = \frac{Edu\delta u}{ds\,\sqrt{E\delta u^2}} = \sqrt{E}\,\frac{du}{ds}.$$

Asimismo esa misma dirección dv/du, por la ortogonalidad de las curvas paramétricas, formará con la dirección $u = \text{cte.}$ un ángulo $\beta = \pi/2 - \theta$, y tendremos, como $\delta u = 0$, que

$$\operatorname{sen}\theta = \cos\beta = \frac{Gdv\delta v}{ds\,\sqrt{G\delta v^2}} = \sqrt{G}\,\frac{dv}{ds}.$$

Substituyendo estos valores de $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$ en (97) quedará

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{G}\operatorname{sen}\theta) - \frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{E}\cos\theta) &= \frac{G'_u}{2\sqrt{G}}\sqrt{G}\,\frac{dv}{ds} - \frac{E'_v}{2\sqrt{E}}\sqrt{E}\,\frac{du}{ds} \\
&\quad + \sqrt{G}\sqrt{E}\,\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{du}{ds} + \sqrt{E}\sqrt{G}\,\frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{dv}{ds} \\
&= \left(\frac{G'_u}{2}\frac{dv}{ds} - \frac{E'_v}{2}\frac{du}{ds}\right) + \sqrt{EG}\,\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{dv}{ds}\right) \\
&= \left(\frac{G'_u}{2}\frac{dv}{ds} - \frac{E'_v}{2}\frac{du}{ds}\right) + \sqrt{EG}\,\frac{d\theta}{ds}. \qquad (98)
\end{aligned}$$

Para tener la curvatura geodésica, hemos de dividir (98), de acuerdo con el lema por $\sqrt{EG - F^2}$, como $F = 0$, resulta finalmente

$$\kappa_g = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(G'_u\frac{dv}{ds} - E'_v\frac{du}{ds}\right) + \frac{d\theta}{ds}.$$

Segundo método:

Supongamos que partimos de un sistema ortogonal tal que $ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$, escojamos dos vectores en la dirección de las líneas coordenadas

$$\bar{e}_u = \frac{\bar{x}'_u}{\sqrt{E}}, \qquad \bar{e}_v = \frac{\bar{x}'_v}{\sqrt{G}}.$$

Obviamente son unitarios ya que $\langle \bar{x}'_u, \bar{x}'_u \rangle = E$, por tanto $\langle \bar{e}_u, \bar{e}_u \rangle = 1$. Análogamente para $\bar{e}_v$. Se tiene ya lo hemos asumido, al tomar $F = 0$ que $\bar{e}_u \perp \bar{e}_v$. Si llamamos θ al ángulo que la tangente a la curva forma con $v = \text{cte.}$ tendremos, por tener la tangente unitaria, que

$$\bar{t}(s) = \cos\theta(s)\,\bar{e}_u + \operatorname{sen}\theta(s)\,\bar{e}_v.$$

La perpendicular a ella en el plano tangente a la superficie será

$$\bar{u}(s) = -\operatorname{sen}\theta(s)\,\bar{e}_u + \cos\theta(s)\,\bar{e}_v.$$

Derivemos el vector tangente, se cumplirá que

$$\begin{aligned}
\bar{t}'(s) &= -\operatorname{sen}\theta(s)\,\frac{d\theta}{ds}\,\bar{e}_u + \cos\theta(s)\,(\bar{e}_u)'_s + \cos\theta(s)\,\frac{d\theta}{ds}\bar{e}_v + \operatorname{sen}\theta(s)\,(\bar{e}_v)'_s, \\
&= \frac{d\theta}{ds}\,\bar{u}(s) + \cos\theta(s)(\bar{e}_u)'_s + \operatorname{sen}\theta(s)(\bar{e}_v)'_s.
\end{aligned}$$

Recordemos que la curvatura geodésica se obtenía al efectuar el producto

$$\kappa_g = \langle \overline{u}(s), \overline{t}'(s) \rangle.$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\kappa_g &= -(\sin\theta(s)\cos\theta(s))\,\langle \overline{e}_u, (\overline{e}_u)'_s\rangle - (\operatorname{sen}^2\theta(s))\,\langle \overline{e}_u, (\overline{e}_v)'_s\rangle \\ &\quad +(\cos^2\theta(s))\,\langle \overline{e}_v, (\overline{e}_u)'_s\rangle + (\operatorname{sen}\theta(s)\cos\theta(s))\,\langle \overline{e}_v, (\overline{e}_v)'_s\rangle + \frac{d\theta}{ds}.\end{aligned}$$

Puesto que los vectores $\overline{e}_u$ y $\overline{e}_v$ son unitarios y perpendiculares $\langle \overline{e}_u, (\overline{e}_u)'_s\rangle = \langle \overline{e}_v, (\overline{e}_v)'_s\rangle = 0$. Por otro lado $\langle (\overline{e}_u)'_s, \overline{e}_v\rangle = -\langle (\overline{e}_v)'_s, \overline{e}_u\rangle$. En consecuencia se simplifica el producto escalar anterior y queda

$$\kappa_g = \langle (\overline{e}_u)'_s, \overline{e}_v\rangle + \frac{d\theta}{ds}.$$

Para calcular $\langle (\overline{e}_u)'_s, \overline{e}_v\rangle$ veamos en primer lugar cuanto vale $(\overline{e}_u)'_s$, tendremos.

$$\begin{aligned}(\overline{e}_u)'_s &= \frac{d\overline{e}_u}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\overline{x}'_u}{\sqrt{E}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{E}}\left(\overline{x}''_{uu}\frac{du}{ds} + \overline{x}''_{uv}\frac{dv}{ds}\right) - \overline{x}_u\left(\frac{E'_u}{2E^{3/2}}\frac{du}{ds} + \frac{E'_v}{2E^{3/2}}\frac{dv}{ds}\right).\end{aligned}$$

Efectuando la multiplicación $\langle (\overline{e}_u)'_s, \overline{e}_v\rangle$, dado que hemos escogido $\overline{e}_v = \overline{x}'_v/\sqrt{G}$, y que además por ser $F = 0$ resulta $\overline{x}'_u \perp \overline{x}'_v$. Por tanto

$$\begin{aligned}\langle (\overline{e}_u)'_s, \overline{e}_v\rangle &= \langle (\overline{e}_u)'_s, \frac{\overline{x}'_v}{\sqrt{G}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{EG}}\langle \overline{x}''_{uu}, \overline{x}'_v\rangle\frac{du}{ds} + \frac{1}{\sqrt{EG}}\langle \overline{x}''_{uv}, \overline{x}'_v\rangle\frac{dv}{ds} \\ &= \frac{1}{\sqrt{EG}}[11,2]\frac{du}{ds} + \frac{1}{\sqrt{EG}}[12,2]\frac{du}{ds}.\end{aligned}$$

Sabemos que $[11,2] = F'_u - \frac{1}{2}E'_v$ y que $[12,2] = \frac{1}{2}G'_u$, pero como en este caso $F = 0$, $F'_u = 0$, de donde

$$\langle (\overline{e}_u)'_s, \overline{e}_v\rangle = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(G'_u\frac{dv}{ds} - E'_v\frac{du}{ds}\right).$$

□

Ejemplo 3.12. *Calcular la curvatura geodésica de la hélice $u = cv$, con $c =$ cte., sobre el cilindro $\overline{x}(u,v) = [r\cos v, r\sin v, ku]$, (si no recordamos qué vector es la normal a una espiral[116]). Se tiene que $E = k^2$ y $G = r^2$, vemos que el ángulo que forma la curva $v =$ cte., es decir $\overline{x}'_u = [0,0,k]$, con la tangente a $\overline{y}(v) = [r\cos(v), r\sin(v), kcv]$, que es $\overline{y}'_v = [-r\sin v, r\cos v, kc]$, verifica*

$$\cos\theta = \frac{\langle \overline{x}'_u, \overline{y}'_v\rangle}{\sqrt{k^2}\,\sqrt{r^2+(kc)^2}} = \frac{k^2 c}{\sqrt{k^2}\,\sqrt{r^2+(kc)^2}.}$$

En consecuencia θ es constante, y tendremos $d\theta/ds = 0$. Por otro lado $G'_u = E'_v = 0$. Luego para cualquier espiral de la forma $u = cv$ se tiene que $k_g = 0$.

[116]Si lo recordamos, sabemos que $\overline{N} = -\overline{n}$, luego la espiral es una geodésica y obviamente su curvatura geodésica es cero y hemos terminado.

Ejercicio 3.7. Repetir el problema anterior , pero para una hélice $u = cv^2$. Tener en cuenta[117] que $dv/ds = (ds/dv)^{-1}$.

Ejercicio 3.8. Sea una superficie de revolución $\overline{x}(u,v) = [\lambda(u)\cos v, \lambda(u)\sin v, \mu(u)]$ y fijemos el paralelo $u = c$. Comprobar que su κ_g, obtenida mediante el teorema de Liouville[118] , coincide con la curvatura geodésica calculada con $(\kappa_g)_{u=c} = -\Gamma^1_{22}\sqrt{EG}/(G\sqrt{G})$. Utilizar cualquiera de los dos métodos para determinar[119] la κ_g del paralelo $u = c$ en el paraboloide de revolución $\lambda(u) = u$ y $\mu(u) = ku^2$.

En lo que sigue y con objeto de probar que las curvas que proporcionan la distancia más corta entre dos puntos son siempre geodésicas, probaremos la fórmula para la curvatura geodésica de Bonnet. Por otro lado esta fórmula permite obtener la curvatura geodésica de una curva más cómodamente que mediante el teorema de Liouville, como veremos en los ejemplos.

Teorema 3.12. *(Fórmula de Bonnet)*

Sea una curva sobre la superficie dada por $\varphi(u,v) =$ cte., entonces se verifica[120] *que*

$$\kappa_g = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{F\varphi'_v - G\varphi'_u}{\sqrt{E(\varphi'_v)^2 - 2F\varphi'_u\varphi'_v + G(\varphi'_u)^2}} \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial v}\frac{F\varphi'_u - E\varphi'_v}{\sqrt{E(\varphi'_v)^2 - 2F\varphi'_u\varphi'_v + G(\varphi'_u)^2}}\right]. \qquad (99)$$

Dem. Derivando en $\varphi(u,v) =$ cte., respecto de un parámetro arbitrario w, resulta $\varphi'_u u'(w) + \varphi'_w v'(w) = 0$, luego tenemos que $v' = -(\varphi'_u/\varphi'_v)u'$. Asimismo sabemos que se cumple $ds = \sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}dw$. Construyendo los productos escalares que aparecen en el lema $\langle \overline{t}, \overline{x}'_v\rangle$ y $\langle \overline{t}, \overline{x}'_u\rangle$, tendremos para el parámetro w (tras dividir por u' numerador y denominador)

$$\begin{aligned}
\langle \overline{t}, \overline{x}'_v\rangle &= \langle \frac{d\overline{x}}{ds}, \overline{x}'_v\rangle = \langle \frac{d\overline{x}/dw}{ds/dw}, \overline{x}'_v\rangle = \langle \frac{\overline{x}'_u u' + \overline{x}'_v v'}{\sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}}, \overline{x}'_v\rangle \\
&= \frac{Fu' + Gv'}{\sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}} = \frac{Fu' + G(-\frac{\varphi'_u}{\varphi'_v}u')}{\sqrt{E(u')^2 - 2F\frac{\varphi'_u}{\varphi'_v}u'u' + G(-\frac{\varphi'_u}{\varphi'_v}u')^2}} = \\
&= \frac{F\varphi'_v - G\varphi'_u}{\sqrt{E(\varphi'_v)^2 - 2F\varphi'_u\varphi'_v + G(\varphi'_u)^2}},
\end{aligned}$$

[117]La solución en este caso es $k_g = -2kcr/(r^2 + 4k^2c^2v^2)^{3/2}$. Nótese que cuando $v \to \infty$, la curvatura geodésica tiende a cero.

[118]Recuerdese que para una circunferencia de radio r se tiene $rv = s$, es decir $dv/ds = 1/r$.

[119]El resultado de este ejercicio para cualquier punto del paralelo $u = c$ es $\kappa_g = c^{-1}/\sqrt{1 + 4k^2c^2}$.

[120]Aunque no decimos nada en el enunciado es obvio que k_g puede quedar en función de dos parámetros a través de E, F y G; por lo que se ha de satisfacer además $\varphi(u,v) =$ cte., o despejar si se puede para que quede en función de un solo parámetro.

de modo análogo

$$\begin{aligned}
\langle \overline{t}, \overline{x}'_u\rangle &= \langle \frac{d\overline{x}/dw}{ds/dw}, \overline{x}'_u\rangle = \langle \frac{\overline{x}'_u u' + \overline{x}'_v v'}{\sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}}, \overline{x}'_u\rangle \\
&= \frac{Eu' + Fv'}{\sqrt{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}} = \frac{Eu' + F(-\frac{\varphi'_u}{\varphi'_v}u')}{\sqrt{F(u')^2 - 2G\frac{\varphi'_u}{\varphi'_v}u'u' + G(-\frac{\varphi'_u}{\varphi'_v}u')^2}} = \\
&= \frac{E\varphi'_v - F\varphi'_u}{\sqrt{E(\varphi'_v)^2 - 2F\varphi'_u\varphi'_v + G(\varphi'_u)^2}}.
\end{aligned}$$

De donde substituyendo en (96) resulta la fórmula del enunciado. □

Ejemplo 3.13. *Repitamos el ejemplo 3.12 con la nueva fórmula y hagamos el ejercicio 3.7. En el ejemplo la hélice era $u = cv$, es decir, $\varphi(u, v) = cv - u = 0$. Luego $\varphi'_v = c$ y $\varphi'_u = -1$. por lo que las dos expresiones a derivar en (99) son constantes. Recordemos que $E = k^2$, $G = r^2$ y $F = 0$, en consecuencia ambas derivadas son nulas y $\kappa_g = 0$.*

En el ejercicio la hélice era $u = cv^2$, resulta $\varphi(u, v) = cv^2 - u = 0$, luego tenemos $\varphi'_v = 2cv$ y $\varphi'_u = -1$. Los valores E F y G son los mismos por tratarse del mismo cilindro que en el ejemplo, por tanto substituyendo en (99) tenemos

$$\begin{aligned}
\kappa_g &= \frac{1}{\sqrt{k^2r^2}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{-(-1)r^2}{\sqrt{r^2 + 4c^2k^2v^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{-2cvk^2}{\sqrt{r^2 + 4c^2k^2v^2}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{kr}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{-2cvk^2}{\sqrt{r^2 + 4c^2k^2v^2}}\right) = \frac{-1}{kr}\frac{\sqrt{r^2 + 4k^2c^2v^2}(2ck^2) - (2cvk^2)\frac{8k^2c^2v}{2\sqrt{r^2 + 4k^2c^2v^2}}}{r^2 + 4k^2c^2v^2} \\
&= \frac{-2kcr}{(r^2 + 4k^2c^2v^2)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Observación 3.18. *Nótese que la curvatura geodésica solo depende de la primera forma y de sus derivadas y obviamente de la curva. Lo que nos reafirma en el hecho de que la curvatura geodésica es un invariante para las transformaciones isométricas.*

Ejercicio 3.9. Dada la curva $u = \sin(v)$ sobre el cilindro $\overline{x}(u, v) = [r\cos v, r\sin v, ku]$. Probar en primer lugar que es una curva plana, y en consecuencia se trata de una elipse. Determinar sus semiejes a y b. Por último probar que su curvatura geodésica toma el valor

$$\kappa_g = \frac{kr\sin v}{(k^2\cos^2 v + r^2)^{3/2}}.$$

Ejercicio 3.10. Se considera el helicoide recto $\overline{x}(u, v) = [u\cos v, u\sin v, kv]$, y sobre su superficie se toman las curvas $u = a$, $v = b$ y $u = v$. Calcular la curvatura geodésica de las tres curvas.

3.8 Las distancia más corta entre dos puntos de una superficie

Teorema 3.13. *(Las geodésicas como extremales de un problema variacional)*

Si existe una curva de mínima distancia entre dos puntos de una superficie, entonces es una geodésica, es decir $\kappa_g = 0$ en todos sus puntos.

DEM. Planteemos el problema, fijados dos puntos $\overline{x}(u_0, v(u_0))$ y $\overline{x}(u_1, v(u_1))$, sobre la superficie se trata de encontrar una curva sobre la superficie $v = v(u)$ tal que la integral

$$J(v(u)) = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{E + 2Fv' + G(v')^2} du$$

sea mínima. Las ecuaciones[121] de Euler-Lagrange del cálculo de variaciones nos dicen –he cambiado la letra F habitual en la formula de Euler-Lagrange por la H, para evitar la coincidencia con el segundo coeficiente de la primera forma cuadrática– que

$$\frac{\partial H}{\partial v} - \frac{d}{du}\left(\frac{\partial H}{\partial v'}\right) = 0.$$

Siendo en este caso

$$H(u, v, v') = \sqrt{E + 2Fv' + G(v')^2},$$

luego la solución del problema $v = v(u)$, caso de existir, debe cumplir[122]

$$\frac{E'_v + 2F'_v v' + G'_v (v')^2}{2\sqrt{E + 2Fv' + G(v')^2}} - \frac{d}{du}\left(\frac{(F + Gv')}{\sqrt{E + 2Fv' + G(v')^2}}\right) = 0. \tag{100}$$

Por otro lado en el paréntesis hemos de derivar respecto de u una expresión del tipo $f(u, v(u))$, obviamente tendremos $\frac{d}{du} = \frac{\partial}{\partial u} + v' \frac{\partial}{\partial v}$. luego podemos reescribir (100)

$$\frac{E'_v + 2F'_v v' + G'_v (v')^2}{2\sqrt{E + 2Fv' + G(v')^2}} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{(F + Gv')}{\sqrt{E + 2Fv' + G(v')^2}}\right) - v' \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{(F + Gv')}{\sqrt{E + 2Fv' + G(v')^2}}\right) = 0. \tag{101}$$

Aplicando la fórmula de Bonnet para la curvatura geodésica de una curva $\varphi(u, v) =$ cte., ver (99) , es decir $\varphi(u, v) \equiv v - v(u) = 0$, tenemos que $\varphi'_u = -v'$ y $\varphi'_v = 1$, la ecuación de la curvatura geodésica queda

$$\kappa_g = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F + Gv'}{\sqrt{E + 2Fv' + G(v')^2}}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{Fv' + E}{\sqrt{E + 2Fv' + G(v')^2}}\right)\right]. \tag{102}$$

[121]Si se quiere minimizar $J(y(x)) = \int_a^b F(x, y, y')dx$, con F'_y y $F'_{y'}$ continuas en el intervalo $[a, b]$. Lo que se hace es lo siguiente. Se modifica $y(x)$, es decir se toma en el lugar de $y(x)$ la función $y(x) + tg(x)$, donde $g(x)$ es una función derivable y que se anula en a y en b, y donde t es un parámetro que al variar modifica la diferencia entre $y(x)$ e $y(x) + tg(x)$. La condición buscada equivale a que $\int_a^b F(x, y + tg, y' + tg')dx$ presente un mínimo para $t = 0$, sea cual sea $g(x)$, ya que para $t = 0$ tenemos la integral de partida. Veamos en que se traduce esa condición. Derivemos respecto del parámetro t, y hagamos $t = 0$, es decir calculemos $[dJ/dt]_{t=0} = 0$. Se tendrá $\int_a^b [F'_y\, g + F'_{y'}\, g'(x)]dx = 0$. Integrando el segundo sumando por partes, resulta $\int_a^b F'_{y'}\, g'(x)dx = \left[g(x)F'_{y'}\right]_a^b - \int_a^b \left(\frac{d}{dx}F'_{y'}\right) g(x)dx$. La parte del corchete es nula por anularse $g(x)$ en a y b, substituyendo lo obtenido en la primera integral queda $\int_a^b \left(F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'}\right) g(x)dx = 0$, para cualquiera que sea $g(x)$. Lo que nos lleva a que en todo el intervalo debe cumplirse que $\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$, que es la famosa condición de Euler-Lagrange.

[122]Recuérdese que la condición de Euler-Lagrange es necesaria, pero no suficiente.

Substituyendo en (102) el valor $\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{(F+Gv')}{\sqrt{E+2Fv'+G(v')^2}}\right)$ despejado en (101), vemos que

$$\kappa_g\sqrt{EG-F^2} = \frac{E'_v+2F'_vv'+G'_v(v')^2}{2\sqrt{E+2Fv'+G(v')^2}} - v'\,\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{(F+Gv')}{\sqrt{E+2Fv'+G(v')^2}}\right)$$
$$-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{Fv'+E}{\sqrt{E+2Fv'+G(v')^2}}\right). \qquad (103)$$

Obviamente $k_g = 0$ solamente si se anula el término de la derecha. Un prolijo cálculo nos convence de que es lo que ocurre. En efecto, tras derivar el segundo y tercer sumando en el miembro derecho de (103), y si nos ocupamos de los numeradores, tras multiplicar el primer sumando por $E+2Fv'+G(v')^2$ para reducir a común denominador, tenemos

$$\begin{aligned}\left((E'_v+2F'_vv'+G'_v(v')^2\right)\left(E+2Fv'+G(v')^2\right) &= \\ E'_vE+2FE'_vv'+GE'_v(v')^2&+\\ 2EF'_vv'+4FF'_v(v')^2+2GF'_v(v')^3&+\\ EG'_v(v')^2+2FG'_v(v')^3+GG'_v(v')^4&, \qquad (104)\end{aligned}$$

análogamente el numerador del segundo sumando vale

$$\begin{aligned}&-v'\left\{2\left(E+2Fv'+G(v')^2\right)\left(F'_v+G'_vv'\right)\right.\\ &\qquad\left.-\left(F+Gv'\right)\left(E'_v+2F'_vv'+G'_v(v')^2\right)\right\} =\\ &-2EF'_vv'-2EG'_v(v')^2-4FF'_v(v')^2-4FG'_v(v')^3-2GF'_v(v')^3-2GG'_v(v')^4\\ &+FE'_vv'+2FF'_v(v')^2+FG'_v(v')^3+GE'_v(v')^2+2GF'_v(v')^3+GG'_v(v')^4, \qquad (105)\end{aligned}$$

el tercer sumando nos proporciona

$$\begin{aligned}&-\left\{2\left(E+2Fv'+G(v')^2\right)\left(F'_vv'+E'_v\right)\right.\\ &\qquad\left.-\left(Fv'+E\right)\left(E'_v+2F'_vv'+G'_v(v')^2\right)\right\} =\\ &-2EF'_vv'-2EE'_v-4FF'_v(v')^2-4FE'_vv'-2GF'_v(v')^3-2GE'_v(v')^2\\ &+FE'_vv'+2FF'_v(v')^2+FG'_v(v')^3+EE'_v+2EF'_vv'+EG'_v(v')^2. \qquad (106)\end{aligned}$$

Sumando los términos derechos de (104), (105) y (106), obtenemos finalmente una suma nula, que es el resultado esperado, y en consecuencia $\kappa_g = 0$. □

Observación 3.19. *Es importante señalar que el teorema anterior solo funciona en el sentido probado. Una curva puede ser geodésica ($\kappa_g = 0$) unir dos puntos y no ser la distancia más corta entre ambos. Hay un ejemplo trivial, consideremos dos puntos sobre la esfera, es claro que la distancia más corta es una geodésica (un arco de círculo máximo), pero también podemos unir los dos puntos utilizando dicho círculo máximo por el lado opuesto, la distancia no sería la mínima y seguiría tratándose de una geodésica, ya que $\overline{N} = \pm\overline{n}$.*

Ejemplo 3.14. *La primera superficie de área mínima y por tanto (ver teorema 3.2) mínima que se conoce es la del catenoide. La razón estriba en que es solución al problema de averiguar qué superficies de revolución tienen área mínima. Problema variacional que se resuelve mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange arriba citadas.*

En efecto, sabemos que el área de revolución en torno al eje OY de $y = f(x)$, se obtiene a partir del área lateral del tronco de cono[123] *como*

$$A(f(x)) = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} x\sqrt{dx^2 + dy^2} = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} x\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Lo consideramos como el problema variacional de encontrar una función $f(x)$ que minimice la integral

$$A(f(x)) = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx,$$

pasando por (x_0, y_0) e (x_1, y_1), donde $F(x, y, y') = x\sqrt{1 + (y')^2}$. Se tendrá que cumplir la ecuación de Euler-Lagrange, es decir

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 - \frac{d}{dx}\left(\frac{2xy'}{2\sqrt{1 + (y')^2}}\right) = 0.$$

En lo que sigue a y b serán las constantes de integración. Luego

$$\frac{xy'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = a \quad \Rightarrow \quad x^2(y')^2 = a^2(1 + (y')^2) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{a}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Integrando resulta,

$$y = a \ \operatorname{arg\,cosh} \frac{x}{a} + b \quad \Rightarrow \quad x = a \ \cosh \frac{y - b}{a}.$$

En paramétricas planares $\overline{y}(u) = [a \cosh \frac{u-b}{a}, u]$. Para pasar al espacio podemos suponer las ecuaciones paramétricas en el plano OXZ. Haciéndolas luego girar en torno al eje OZ tendremos

$$\overline{x}(u, v) = [a \cosh(\frac{u - b}{a}) \cos v, a \cosh(\frac{u - b}{a}) \sin v, u].$$

Nótese que las constante a y b se pueden calcular[124] *a partir de (x_0, y_0) e (x_1, y_1). En consecuencia el catenoide de revolución es la solución al problema variacional propuesto.*

---

[123] Recordemos de primer curso, la familiar expresión *área* $= \pi g(R + r)$, donde g es la longitud de la generatriz, y R y r los radios mayor y menor, generatriz que se convertirá en $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ y $R + r$ que se convierte, bien en $2x$, bien en $2f(x)$; dependiendo de si giramos en torno al eje OY o en torno al OX.

[124] Basta con hacer $x_0 = a \cosh \frac{y_0 - b}{a}$ y $x_1 = a \cosh \frac{y_1 - b}{a}$, resolver numéricamente y obtener a y b.

3.9 Tres teoremas fundamentales

Teorema 3.14. *(Teorema Egregium de Gauss)*

La curvatura de Gauss de una superficie es invariante respecto de las flexiones.

Dem. Despejando $K = (eg-f^2)/(EG-F^2)$ en las fórmulas (67) y/o (66), o bien utilizando (82), observamos que K solo depende de los coeficientes de la primera forma, de los símbolos de Christoffel de segunda especie y de sus derivadas. Por tanto depende de los coeficientes de la primera forma y de sus derivadas primeras y segundas. Un habitante de la superficie, en base a mediciones sobre dicha superficie (primera forma), sería capaz de obtener K. Por tanto K es independiente de las transformaciones isométricas que pueda sufrir la superficie. □

Observación 3.20. *Se denomina flexión a una deformación de la superficie que no suponga estirarla ni romperla. En otras palabras se trata de una isometría, es decir se conservan las distancias entre puntos, medidas sobre la superficie, antes y después de la transformación.*

Este resultado fundamental prueba que dos superficies con diferentes curvaturas de Gauss son inherentemente distintas entre si y nunca mediante flexiones conseguiremos superponer la una a la otra.

Teorema 3.15. *(Teorema de Gauss-Bonnet)*

Si la curvatura gaussiana K de una superficie es continua en una región A simplemente conexa, limitada por una curva cerrada C compuesta de k arcos regulares cuyos ángulos exteriores[125] *en los vértices son $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$, se tiene que*

$$\int_C \kappa_g ds + \iint_A K dA = 2\pi - \sum_i \theta_i,$$

siendo κ_g la curvatura geodésica de los arcos. Si se toman geodésicas resulta la famosa formulación[126]

$$\sum_i \theta_i = 2\pi - \iint_A K dA.$$

Dem. Sin entrar en detalles demos una ligera idea de la demostración. Es bien conocido el teorema de Green para pasar de integrales curvilíneas a integrales dobles, que afirma que

$$\int_C P du + Q dv = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}\right) du dv.$$

Utilizando este teorema calcularemos

$$\int_C \kappa_g ds.$$

El teorema de Liouville para κ_g, afirma[127] que

$$\kappa_g(s) = \frac{d\theta}{ds} + \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left[-E'_v \frac{du}{ds} + G'_u \frac{dv}{ds}\right],$$

[125] Recuérdese que los ángulos exteriores de un triángulo plano suman 2π.

[126] Si la superficie es una esfera (curvatura de Gauss constante e igual a $1/r^2$) y consideramos sobre ella un triángulo, entonces resulta el conocido teorema de Legendre sobre el área de un triángulo esférico $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi = \text{exceso esférico} = A \cdot K = A/r^2$.

[127] Una formulación equivalente sería $\kappa_g ds = d\theta + (\kappa_g)_1 \cos\theta\, ds + (\kappa_g)_2 \sin\theta\, ds$.

que puede escribirse como

$$\kappa_g(s)\ ds = d\theta + \frac{1}{2}\frac{-E'_v}{\sqrt{EG}}du + \frac{1}{2}\frac{G'_u}{\sqrt{EG}}dv. \tag{107}$$

Integrando (107) a lo largo de la curva y tras aplicar[128] el teorema de Green quedará

$$\begin{aligned}\int_C \kappa_g ds &= \int_C d\theta + \int_C \left(-\frac{E'_v}{2\sqrt{EG}}\right) du + \left(\frac{G'_u}{2\sqrt{EG}}\right) dv \\ &= \int_C d\theta + \iint_A \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{G'_u}{\sqrt{EG}} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{E'_v}{\sqrt{EG}}\right)\frac{1}{\sqrt{EG}}\right\}\sqrt{EG}\ dudv \end{aligned} \tag{108}$$

Por otro lado la fórmula de Brioschi para la curvatura de Gauss cuando son ortogonales es

$$K \quad = \quad -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{G'_u}{\sqrt{EG}} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{E'_v}{\sqrt{EG}}\right].$$

Es claro que $dA = \sqrt{EG}\ dudv$, tendremos que substituyendo el valor de K en (108) queda finalmente

$$\int_C \kappa_g ds = \int_C d\theta - \iint_A K dA.$$

Para entender porqué

$$\int_C d\theta = 2\pi - \sum_{i=1}^{k}\theta_i,$$

supongamos en primer lugar que la frontera C de la región A sea una curva con tangente continua, podemos contraer la frontera con continuidad sin que varíe la integral, en ese caso la integral valdría 2π, es decir θ contaría una vuelta completa.

Supongamos, en segundo lugar, que la frontera C estuviera compuesta por k arcos regulares que formasen ángulos exteriores θ_1, θ_2, ..., θ_k, en los vértices donde concurren los arcos. La variación total de θ seguiría siendo 2π, pero la parte continua aportaría menos que en el supuesto anterior ya que habría que restarle la suma de los ángulos exteriores que cada arco forma con el siguiente (en que los que el conteo de θ salta). Luego la parte continua aportaría una cantidad inferior a 2π, es decir $2\pi - \sum_{i=1}^{k}\theta_i$. Substituyendo

$$\int_C d\theta = 2\pi - \sum_{i=1}^{k}\theta_i,$$

de resulta finalmente el teorema. □

Ejemplo 3.15. *Verifiquemos la identidad del teorema de Gauss-Bonnet con un sencillo ejemplo. Consideremos un triángulo esférico cuyos lados sean el ecuador y dos meridianos que formen entre si, en el hemisferio norte, un ángulo de $\pi/6$.*

En primer lugar, por tratarse de tres geodésicas se cumple que

$$\int_C \kappa_g ds = 0.$$

[128] Es importante al hacer la integral curvilínea tener en cuenta el sentido de la normal $\overline{N}$ a la superficie para la parametrización dada, ya que ha de satisfacerse la regla del sacacorchos al escoger el sentido en el cálculo de la integral de línea.

Los ángulos externos suman

$$\sum_{i=1}^{3} \theta_i = (\pi - \frac{\pi}{6}) + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 2\pi - \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad 2\pi - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = \frac{\pi}{6}.$$

Por otro lado como la superficie es la esfera, la curvatura gaussiana es constante y vale $K = 1/r^2$

$$\iint_A K dA = \frac{1}{r^2} \text{ área}(A) = \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{3} \frac{4\pi r^2}{8} \right) = \frac{\pi}{6}.$$

Luego se cumple el teorema.

Ejemplo 3.16. *Se considera sobre la esfera*[129] $\overline{x}(u, v) = [r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, r \sin u]$, *de radio unidad un rectángulo curvilíneo formando por los 4 arcos siguientes:* $v = 0$ *con* $u \in [0, \pi/4]$*;* $v = \pi/2$ *con* $u \in [0, \pi/4]$*;* $u = 0$ *con* $v \in [0, \pi/2]$ *y finalmente* $u = \pi/4$ *con* $v \in [0, \pi/2]$*. Se pide determinar todos los términos de la fórmula de Gauss-Bonnet, verificando la identidad.*

En primer lugar $E = r^2$, $F = 0$ *y* $G = r^2 \cos^2(u)$, *y se cumple además*

$$2\pi - \sum_{k=1}^{4} \theta_k = 2\pi - 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 0$$

Por otro lado vimos que $\Gamma^1_{22} = \cos(u) \operatorname{sen}(u)$, *luego*

$$\begin{aligned} (\kappa_g)_{u=cte} &= -\Gamma^1_{22} \frac{\sqrt{EG - F^2}}{G\sqrt{G}} \\ &= -\Gamma^1_{22} \frac{r^2 \cos(u)}{r^3 \cos^3(u)} = -\frac{1}{r} \frac{\operatorname{sen}(u)}{\cos(u)}. \end{aligned}$$

En el paralelo $u = \pi/4$, *vale* $(\kappa_g)_{u=\pi/4} = -1/r$. *Por otro lado*

$$ds = \sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} = \sqrt{G}dv$$

luego $\sqrt{G} = r \cos(u)$, *como* $dv = d\theta$ *y* $u = \pi/4$, $ds = \sqrt{G}dv = r \cos(\pi/4) d\theta$ *y tendremos*[130] *que*

$$\int_C \kappa_g ds = 0 + 0 + 0 + \int_0^{\pi/2} (\frac{-1}{r})(r \cos(\frac{\pi}{4}) d\theta) = -\frac{\pi}{4}\sqrt{2}.$$

El área de la franja elegida será

$$\text{área} = \int_0^{\pi/4} du \int_0^{\pi/2} \sqrt{EG - F^2} dudv = \int_0^{\pi/4} du \int_0^{\pi/2} r^2 \cos(u) dudv = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} r^2.$$

Es claro que por tratarse de una esfera $K = 1/r^2$. *La identidad se cumple, ya que*

$$\int_C \kappa_g ds = -\frac{\pi}{4}\sqrt{2} = 0 - K \int_A dA = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\pi\sqrt{2}}{4} r^2.$$

Nótese que podríamos haberla utilizado para calcular el área de la franja sin hacer la integral.

---

[129]Para tener que utilizar la regla del sacacorchos. Hemos escogido una parametrización *no standard* de la esfera. La *standard* es $\overline{x}(u, v) = [\cos(u) \cos(v), \sin(u) \cos(v), \sin(v)]$, que tiene la normal hacia el exterior.

[130]Para la parametrización escogida el vector normal $\overline{N} = \overline{x}'_u \times \overline{x}'_v / \sqrt{EG - F^2}$ se orienta hacia dentro de la esfera. En consecuencia hemos de recorrer el rectángulo en el sentido de las agujas del reloj para que se satisfaga la regla del sacacorchos y eso es lo que hacemos al tomar $\theta \in [0, \pi/2]$.

Ejercicio 3.11. Repetir el ejercicio anterior pero ahora para una franja entre el ecuador y el paralelo $u = \pi/3$.

Definición 3.11. *Se denomina curvatura integral de una cierta región A sobre la superficie al valor*

$$\kappa_t = \iint_A K dA.$$

Ejercicio 3.12. Si consideramos una superficie compacta, sin frontera y orientable[131], el valor $\kappa_t/(2\pi)$, donde κ_t es la curvatura integral, resulta ser un invariante topológico, llamado característica de Euler-Poincaré (ver pág. 177 de [3]) de la superficie compacta sin frontera y orientable. En el caso de la esfera, tenemos obviamente que vale $\boxed{2}$, en el caso del toro su cálculo nos da $\boxed{0}$. Este invariante topológico es el que aparece en la fórmula de Euler para los poliedros regulares $V + C = A + \boxed{2}$, que son topológicamente equivalentes a la esfera. Verificar la validez de la fórmula de Euler en el caso de un toro triangular , cuya sección sea también un triángulo equilátero, y que es topológicamente equivalente al toro.

Observación 3.21. *Quedaría por ver el denominado Teorema Fundamental de la teoría de superficies, análogo al de la teoría de curvas, pero que requiere para su demostración aparte de las ecuaciones de Gauss-Codazzi conocimientos de la teoría de integración de sistemas mixtos de ecuaciones en derivadas parciales. La primera versión del Teorema Fundamental fue dada por Ossian Bonnet (1828-1981).*

Teorema 3.16. *(Teorema fundamental de la teoría de superficies)*

Si E, F, G, e, f, g son funciones dadas de (u, v), de clase infinito, y tal que se satisfacen las 4 ecuaciones de compatibilidad de Gauss-Codazzi y las 2 de Mainardi-Codazzi y supuesto[132] que $EG - F^2 > 0$ y $E > 0$ y $G > 0$, entonces existe una superficie $\overline{x} = \overline{x}(u, v)$ unívocamente determinada por ellas, salvo un desplazamiento, que tiene como primera y segunda forma respectivamente $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ y $edu^2 + 2fdudv + gdv^2$.

Ejercicio 3.13. Determinar si las siguientes parejas de posibles formas I y II corresponden o no a una verdadera superficie.

$$\text{a)} \quad \begin{cases} \mathrm{I} & \equiv \; du^2 + e^u dv^2 \\ \mathrm{II} & \equiv \; e^u du^2 + dv^2 \end{cases} \qquad \text{b)} \quad \begin{cases} \mathrm{I} & \equiv \; du^2 + e^v dv^2 \\ \mathrm{II} & \equiv \; e^u du^2 \end{cases}$$

$$\text{c)} \quad \begin{cases} \mathrm{I} & \equiv \; \cosh^2(\frac{u}{a})du^2 + a^2\cosh^2(\frac{u}{a})dv^2 \\ \mathrm{II} & \equiv \; \frac{-1}{a}du^2 + a\,dv^2 \end{cases} \qquad \text{d)} \quad \begin{cases} \mathrm{I} & \equiv \; du^2 + v^2 dv^2 \\ \mathrm{II} & \equiv \; vdv^2 \end{cases}$$

Indicar en el caso de que no sean superficies, cual o cuales de las ecuaciones de condición no se satisfacen; y en el caso de que si lo sean calcular la curvatura gaussiana y media de la correspondientes superficie.

[131] Hasta ahora no hemos utilizado este concepto de la geometría diferencial, sin embargo, más proximo a la topología. Se dice que una superficie S es orientable, ver pág 103 de [3], si existe una colección de cartas $\overline{x}_\alpha : U_\alpha \to S$, con $U_\alpha \subset \mathbb{R}^2$, que recubren S, esto es $S = \cup_{\alpha \in A}\overline{x}_\alpha(U_\alpha)$ y si $p \in S$ cae en una zona común a dos cartas $p \in \overline{x}_\beta(U_\beta) \cap \overline{x}_\gamma(U_\gamma)$, entonces el Jacobiano $J(\overline{x}_\gamma^{-1} \circ \overline{x}_\beta)$ en p tiene siempre determinante positivo. Lo que equivale a que $\overline{N}$ recorriendo toda la superficie no cambie de signo. La banda de Moebius no es una superficie orientable, tampoco lo es la superficie de Henneberg, ver pág 68 de [12].

[132] Para las superficies con coordenadas curvilíneas reales.

Observación 3.22. *Recuerdese –isometría entre el catenoide y el helicoide– que la primera forma cuadrática por si sola no garantiza la unicidad de la superficie. Sabemos que*

$$\begin{aligned}\overline{x}(u,v) &= [\sqrt{1+u^2}\cos(v), \sqrt{1+u^2}\sin(v), \ln(u+\sqrt{1+u^2})],\\ \overline{y}(u,v) &= [u\cos(v), u\sin(v), v],\end{aligned}$$

tienen la misma primera forma cuadrática

$$ds^2 = du^2 + (1+u^2)dv^2.$$

Obviamente la segunda forma cuadrática es distinta para ambas, siendo respectivamente

$$\mathrm{II}(\overline{x}(u,v)) \equiv \frac{-1}{1+u^2}\,du^2 + dv^2, \qquad \mathrm{II}(\overline{y}(u,v)) \equiv \frac{-dudv}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Nótese que forzosamente, por Brioschi, la curvatura gaussiana es la misma para ambas superficies, y vale

$$K = \frac{-1}{(1+u^2)^2}.$$

Menos obvio, pero si fácil de comprobar, es que también tienen la misma curvatura media $M = 0$*, como*

$$M = \frac{Eg + Ge - 2Ff}{2(EG - F^2)}.$$

Substituyendo tendremos respectivamente

$$\begin{aligned} M &= \frac{1\cdot 1 + (1+u^2)(\frac{1}{1+u^2}) - 2\cdot 0\cdot 0}{2(EG-F^2)} = 0,\\ M &= \frac{1\cdot 0 + (1+u^2)\cdot 0 - 2\cdot 0\cdot \frac{-1}{\sqrt{1+u^2}}}{2(EG-F^2)} = 0.\end{aligned}$$

Ejemplo 3.17. *Nótese que otro ejemplo de lo señalado en la observación anterior, por obvio no menos ejemplo, es entre el plano, cuya primera forma es* $ds^2 = du^2 + dv^2$*, y el cilindro* $\overline{x}(u,v) = [\cos(v), \mathrm{sen}(v), u]$*, que tiene la misma primera forma. La segunda forma del plano es obviamente* $e = f = g = 0$*, mientras que la segunda forma del anterior cilindro es* $e = f = 0$ *y* $g = 1$*. Coinciden la curvatura gaussiana* $K = 0$*, pero no así la curvatura media que para el plano es* $M = 0$ *y para el cilindro vale* $M = 1/2$*.*

References

[1] A. López y A. de la Villa, *Geometría Diferencial*, Clagsa, Madrid 1997.

[2] T. Banchoff and Stephen Lovett,*Differential Geometry of Curves and Surfaces*, A.K. Peters, Ltd. Natick Massachusetts, 2010.

[3] John McCleary, *Geometry from a differentiable viewpoint*, Cambridge University Press, New York 1994.

[4] J. Dennis Lawrence, *A catalog of special plane curves*, Dover Publications Inc. New York, 1972.

[5] Manfredo P. do Carmo, *Geometría diferencial de curvas y superficies*, Alianza Universidad Textos, Madrid 1976.

[6] Enciclopaedia of Math. Sciences, *Basic ideas and concepts of Differential Geometry*, D.V. Alekseevskij, A.M. Vinogradov. V.V. Lychagin, Geometry I, Vol 28. Springer-Verlag.

[7] A.S. Fedenko, *Problemas de geometría diferencial*, Editorial Mir, Moscu 1981.

[8] A. Gray, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1993.

[9] Noel J. Hicks, *Notas sobre Geometría Diferencial*, Editorial Hispano Europea, Barcelona, España, 1974.

[10] W. Klingenberg, *Curso de Geometría Diferencial*, Editorial Alhambra, Barcelona 1978.

[11] Barret O'Neill, *Elementary Differential Geometry*, Second Edition, Elsevier 2006.

[12] John Oprea, *Differential Geometry and its applications*, Prentice Hall, 1997.

[13] I.S. Sokolnikoff, *Análisis Tensorial*, Index-Prial, Madrid 1971.

[14] Dirk J. Struik, *Geometría Diferencial Clásica*, Ed. Aguilar, 1966.